# 高1・2　スタンダードレベル数学ⅠAⅡBを受講する皆さんへ

ようこそ，『スタディサプリ』の数学の講座へ！　この講座は

**「数学ⅠAⅡBをはじめから学びたい」**

という人にピッタリの講座です。

**高１・高２のみなさん**はもちろん，**それ以外の学年の人**も大歓迎です。

数学ⅠAⅡBを「こうしたい！」という思いは，人によって様々かと思います。

- **学校で学んだことをしっかり定着させたい！**
- **理解が不十分だったところを取り戻したい！**
- **ある分野で，自分が詰まったところがどこなのかを知りたい！**

それぞれの思いをかなえるために用意されたのが以下です。

- **『テキスト』**　…「講義問題」「練習問題」
- **『講義動画（授業）』**
- **『テキスト 解答集』**…「講義問題の解答・解説」「練習問題の解答・解説」

## 予習は必要なし！　「講義動画」で一から説明します！

講義問題には「解答・解説」も用意してあります。**「板書で省略された途中計算がわからない」ということはありません。**また，「練習問題」とその解答・解説を用意してありますので，**「授業を受けっぱなし」「せっかく練習問題を解いたのに答えしかない」といった問題をすべて解決！**　後ほど詳しく説明しますが，しっかり活用すれば，学校の授業や自分の勉強がより楽しくなることでしょう。**わかれば，面白い。面白ければ，先が知りたくなる。**当然ですね。

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。直接会うことはなかなかできませんが，みなさんが真剣に動画を視聴すれば，まるで目の前に先生がいるような錯覚すら覚えることでしょう。なぜなら，先生はいつでも君たち一人ひとりが真剣に授業を受けている姿をカメラの向こうに思い浮かべながら授業しているのですから。

さぁ，そろそろ時間です。**いつでも，どこでも，何度でも**。ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

**山内　恵介**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# ＜前期　目次＞


| 講 | タイトル | 応用問題（ハイレベルテキスト） |
|---|---|---|
| 第１講 | 展開 | なし |
| 第２講 | 因数分解 | 第１講 $\boxed{1}$ |
| 第３講 | 実数・絶対値・１次不等式 | 第１講 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |
| 第４講 | 集合・命題と条件 | 第10講 $\boxed{1}$・第15講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |
| 第５講 | ２次関数(1) | 第２講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |
| 第６講 | ２次関数(2) | 第３講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |
| 第７講 | ２次関数(3) | 第４講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |
| 第８講 | ２次関数(4) | 第５講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |
| 第９講 | 三角比(1) | 第６講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ |
| 第10講 | 三角比(2) | 第６講 $\boxed{3}$・第７講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |
| 第11講 | 三角比(3) | 第８講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$[1] |
| 第12講 | 平面図形(1) | 第９講 $\boxed{1}$ |
| 第13講 | 平面図形(2) | 第８講 $\boxed{3}$[2]・第９講 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |
| 第14講 | 場合の数(1) | 第10講 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$・第11講 $\boxed{1}$ |
| 第15講 | 場合の数(2) | 第11講 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |
| 第16講 | 場合の数(3) | 第12講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |
| 第17講 | 確率(1) | 第13講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |
| 第18講 | 確率(2) | 第14講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |
| 第19講 | 図形と方程式(1) | 第21講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |
| 第20講 | 図形と方程式(2) | 第22講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |
| 第21講 | 図形と方程式(3) | 第23講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$・第24講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |
| 第22講 | 三角関数(1) | 第18講 $\boxed{1}$ |
| 第23講 | 三角関数(2) | 第18講 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$・第19講 $\boxed{1}$ |
| 第24講 | 三角関数(3) | 第18講 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$・第20講 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ |


（以下，後期に続く）

※「応用問題（ハイレベルテキスト）」は，スタディサプリ「**高１・２　ハイレベル数学ⅠAⅡB**」の対応する講を表しています。さらに理解を深めたい，応用的な問題にチャレンジしたい人はこちらに進んでください。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# ＜講座の受講の仕方＞

ここでは，効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答冊子」に分かれています。この３つを効果的に使い，実力を伸ばしていきましょう。

## ①　講義問題について（テキスト）

講義問題は**「例題」**と**「類題」**で構成されています。

**「例題」**…　各分野の基礎的な内容を理解するために必要な問題です

**「類題」**…　例題で得た知識を練習するための問題です

この分野が未習，または理解が不十分でもまったく問題ありません。また，予習は必要ありません。

## ②　講義について（動画・解答冊子）

テキストと筆記用具を手元に，動画を再生してください。そして，真剣に視聴して，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。主な流れは次の⑴～⑶です。

⑴　まず**「例題」**を通じて，この分野に必要な用語・知識・公式の説明があります。特に大事なポイントは「Point Pickup」の枠に書き，あとで復習できるようにしておくとよいでしょう。

⑵　例題を視聴したら，一度画面を止め，**「類題」**にチャレンジしてみましょう。例題の解法を参考に，自力で解いてみてください。

⑶　類題を解き終えたら，動画の続きを再生してください。動画を見て類題の解法が合っているかを確かめます。最後の答えだけでなく，途中の進め方についてもチェックしてください。

「例題の視聴」→「類題を解く」→「類題の視聴」が１セットです。時間がない時は１日１セット，時間がある時は１講まるごとなど，工夫して進めてください。

大事なのは

- **「集中力」**
- **「集中しよう」「何かをこの先生から得てやる」という「気持ち」**
- **数学ができるようになりたいという「思い」**

をもって視聴することです。

動画に慣れていない，また数学が苦手な人は，最初は「授業が早い！」と感じるかもしれません。この講座はいつでも画面を止められます。必要に応じて戻ってください。そのうち，このペースに慣れていくでしょう。

そして

- **「やっぱり自分はできない」は厳禁！**

です。あきらめず何度もチャレンジすること。必ずできるようになりますよ。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，画面の文字が見えづらいときは，「**解答冊子**」に途中計算が掲載してあります。スムーズに視聴を進めるために役立ててください。

## ③　講義問題の復習について（テキスト・解答冊子）

視聴が終わったら，「例題」「Point Pickup」「類題」を見て

**・この講から何を学んだか**

**・この講を受講して何ができるようになったか**

を思い浮かべてみてください。時間があれば「例題」「類題」をもう一度解き直してみましょう。もし解法が全然思いつかない，忘れた，という場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします。

**・「復習したときが，真の学習の完成」**

です。

## ④　練習問題について（テキスト・解答冊子）

①～③が終わると，自分が本当にできるようになったかを確かめたくなるでしょう。「**練習問題**」が各講に用意してあります。講義の問題に関連する問題です。この講で学んだことを参考に自力で解いてみましょう。

**・「自分はちゃんと理解できているのか」**

**・「一見新しい問題に見えても，今までの知識を使えるか」**

それをこの練習問題で試してみてください。解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。より理解が深まります。

---

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まるでしょう。そして大切なのは

**・ペースを作り，守る**

ことです。週１回，１時間。どこの曜日のどの時間帯にやるかを決め，それを守ること。学校に通う，予備校に通うのと同じように，「スタディサプリ」を受ける時間。数学に本気で向きあう時間。これを確保してください。学校の宿題があろうと，部活で疲労していようと，ペースを守ること。それが「実力向上」と「自信」になります。

そしてさらに先が知りたくなった人は，「**高１・２　ハイレベル数学ⅠAⅡB**」に進んでみてください。どの講を見ればよいのかは，「目次」に載っています。そこには，さらに深い，数学の本質が待っています。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第１講　展開

**例題１－１**

次の式を展開せよ．

(1)　$(x-y-2z)(x-y+z)$

(2)　$(a+b+c)^2$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題１－１**

次の式を展開せよ.

(1)　$(a+b-c-d)(a-b-c+d)$

(2)　$(a+b-2c)^2$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題１－２**

次の式を展開せよ.

(1)　$(x+1)(x-1)(x+2)(x+4)$

(2)　$(a+b)^2(a-b)^2$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題1－2**

次の式を展開せよ.

(1)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

(2)　$(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2)^2$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題1－3**

次の式を展開せよ.

(1)　$(x+2)^3$

(2)　$(2x-y)^3$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題１－３**

次の式を展開せよ．

(1)　$(2x+3)^3$

(2)　$(3x-4y)^3$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題１－４**

次の式を展開せよ．

(1)　$(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(2)　$(x-2)(x^2+2x+4)$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題１－４**

次の式を展開せよ．

(1)　$(x+3)(x^2-3x+9)$

(2)　$(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第１講　展開

次の式を展開せよ．

(1)　$(2x-3y+z)(2x+3y-z)=4x^2-$ ア $y^2-z^2+$ イ $yz$

(2)　$(x-2y-3z)^2=x^2+4y^2+$ ウ $z^2-4xy+$ エオ $yz-6zx$

(3)　$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)=x^4+$ カ $x^3-7x^2-$ キク $x+24$

(4)　$(a+1)^3(a-1)^3=a^{ケ}-3a^4+$ コ $a^2-1$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第２講　因数分解

**例題２－１**

次の式を因数分解せよ．

(1)　$3x^2-5x+2$

(2)　$2x^2+xy-6y^2$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題２－１**

次の式を因数分解せよ.

(1)　$2x^2-9x+4$

(2)　$6a^2-ab-12b^2$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題２－２**

次の式を因数分解せよ.

(1)　$x^3+125$

(2)　$8a^3-27b^3$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題２－２**

次の式を因数分解せよ．

(1)　$a^3+27$

(2)　$125x^3-8y^3$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題２－３**

次の式を因数分解せよ．

(1)　$x^4+x^2-2$

(2)　$x^4-10x^2+9$

**【Point Pickup】**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題2－3**

次の式を因数分解せよ.

(1)　$x^4-16$

(2)　$x^6-1$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題２－４**

次の式を因数分解せよ.

(1)　$x^2-8y+2xy-16$

(2)　$x^2-2xy+y^2-x+y-2$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題２－４**

次の式を因数分解せよ.

(1)　$x^2+xy+2x+y+1$

(2)　$x^2+8x-y^2+2y+15$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第２講　因数分解

次の式を因数分解せよ．

(1)　$2x^2-13x+6=($ ア $x-$ イ $)(x-$ ウ $)$

(2)　$8x^3+27y^3=(2x+3y)(4x^2-$ エ $xy+9y^2)$

(3)　$x^4-2x^2-8=(x+$ オ $)(x-$ カ $)(x^2+2)$

(4)　$x^2-2y^2-xy+3y-1=(x-$ キ $y+$ ク $)(x+y-$ ケ $)$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第３講　実数・絶対値・１次不等式

**例題３－１**

次の値を求めよ.

(1)　$|5|$　(2)　$|-3|$　(3)　$|\sqrt{3}-2|$　(4)　$\sqrt{(-4)^2}$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題３－１**

次の値を求めよ．

(1)　$|\pi-4|$　　(2)　$x \geqq 3$ のとき　$|x-3|$　　(3)　$a<2$ のとき　$\sqrt{(a-2)^2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 3 − 2**

(1)　次の式の分母を有理化せよ.

(ア)　$\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$　　(イ)　$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ の整数部分を $a$，小数部分を $b$ とするとき，$a$，$b$ の値を求めよ.

**【Point Pickup】**



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題3－2**

(1)　次の式の分母を有理化せよ．

(ア)　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$　　(イ)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

(2)　$\dfrac{7}{3+\sqrt{2}}$ の整数部分を $a$，小数部分を $b$ とするとき，$a$，$b$ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題３－３**

(1)　次の不等式・連立不等式を解け.

(ア)　$3(2x-1)<8x-1$

(イ)　$\begin{cases} 4x+5>25-x \\ \dfrac{3x-1}{2} \leqq \dfrac{2(x+5)}{3}+2 \end{cases}$

(ウ)　$-2x+1<3x+4<2(3x-4)$

(2)　$\dfrac{6x+1}{6} \geqq \dfrac{5}{3}x-\dfrac{5}{2}$ を満たす自然数 $x$ を求めよ.

【Point Pickup】



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題３－３**

(1)　次の不等式・連立不等式を解け.

(ア) $\begin{cases} 5x+2 \geqq 4x-1 \\ 5x-3 > 8x+5 \end{cases}$　　(イ) $8(x+2) < 5x+1 \leqq 3(x-4)$

(2)　不等式 $\dfrac{x+8}{2} < \dfrac{4}{3}x+1$ を満たす最小の整数 $x$ を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題３－４**

次の方程式・不等式を解け.

(1)　$|x-2|=3$　　(2)　$|2x-1|<5$　　(3)　$|3x+2|\geqq 4$

(4)　$|x+4|=5x$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題３－４**

次の方程式・不等式を解け.

(1)　$|x+5|=2$　　(2)　$|3x+2|\leqq 3$　　(3)　$|x-1|\geqq 2$

(4)　$|x-3|=-2x$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第3講　実数・絶対値・1次不等式

(1)　$|x-2|$ は　$x \geqq 2$ のとき $\boxed{\text{ア}}$　　$x<2$ のとき $\boxed{\text{イ}}$ である．

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを次の①～④から選べ．

①　$x-2$　　②　$x+2$　　③　$-x+2$　　④　$-x-2$

(2)　$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を $a$，小数部分を $b$ とするとき，

$a=\boxed{\text{ウ}}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}+\boxed{\text{オ}}}{2}$ である．

(3)　$x-6<3x-4 \leqq 2x+1$ を満たす整数 $x$ は $\boxed{\text{カ}}$ 個ある．

(4)　次の不等式の解を求めよ．

(ア)　$|x-3| \leqq 5$　　$-\boxed{\text{キ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ク}}$

(イ)　$|3x+2|>4$　　$x<-\boxed{\text{ケ}}$，$\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}<x$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第４講　集合・命題と条件

**例題４－１**

全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ の部分集合 $A$，$B$ を

$A=\{1,\ 3,\ 6,\ 7,\ 10\}$，$B=\{2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 9\}$

とする．このとき，次の集合を求めよ．

(1)　$A\cap B$　　(2)　$A\cup B$　　(3)　$\overline{A}$　　(4)　$A\cap\overline{B}$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題４－１**

1 から 12 までの自然数全体の集合 $U$ を全体集合とし，その部分集合のうち 2 の倍数全体の集合を $A$，3 の倍数全体の集合を $B$ とする．このとき，次の集合を求めよ．

(1) $A \cap B$　(2) $A \cup B$　(3) $\overline{A} \cap B$　(4) $\overline{A} \cap \overline{B}$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題４－２**

$x$，$y$ を実数とする．次の命題の真偽を調べよ．偽ならば反例を１つあげよ．

(1)　$x=1$　ならば　$x^2=1$　　　(2)　$x^2=1$　ならば　$x=1$

(3)　$x+y>0$ かつ $xy>0$　ならば　$x>0$ かつ $y>0$

(4)　$x \geqq 1$　ならば　$x>1$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題４－２**

$x$，$y$ を実数とする．次の命題の真偽を調べよ．偽ならば反例を１つあげよ．

(1)　$xy=0$　ならば　$x=0$　である．

(2)　$-2<x<3$　ならば　$-2\leqq x<5$　である．

(3)　$x$ を整数とするとき，$x$ が 4 の倍数ならば，$x$ は 2 の倍数である．

(4)　$x^2=2x$　ならば　$x=2$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題４－３**

次の条件 $p$ は条件 $q$ であるための何条件であるか．最も適するものを㈠～㈣から選べ．
ただし，$x$，$y$ は実数とする．

(1)　$p$：$x=3$　　　$q$：$x^2-4x+3=0$

(2)　$p$：△ABC が直角三角形　　$q$：$\angle A=90^\circ$

(3)　$p$：$xy=0$　　　$q$：$x$，$y$ のうち少なくとも１つは０

(4)　$p$：$x>0$　　　$q$：$|x|>1$

(ア)　必要十分条件である

(イ)　必要条件であるが十分条件ではない

(ウ)　十分条件であるが必要条件ではない

(エ)　必要条件でも十分条件でもない

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題4－3**

次の条件 $p$ は条件 $q$ であるための何条件であるか．最も適するものを(ア)～(エ)から選べ．ただし，$x$，$y$ は実数とする．

(1)　$p$：$x \neq 0$　　$q$：$x^2-3x+2=0$

(2)　$p$：四角形 ABCD が正方形　　$q$：四角形 ABCD が長方形

(3)　$p$：$x=1$　　$q$：$xy=1$

(4)　$p$：$x$ が 4 の倍数　かつ　6 の倍数　　$q$：$x$ が 24 の倍数

(ア)　必要十分条件である　　(イ)　必要条件であるが十分条件ではない

(ウ)　十分条件であるが必要条件ではない　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題４－４**

(1)　次の条件の否定を求めよ．ただし $x$，$y$ は実数とする．

(ア)　$x=1$　　(イ)　$1<x\leqq 2$

(ウ)　$x>0$　かつ　$y\leqq 2$　　(エ)　$x$ は正　または　$y$ は３の倍数

(2)　命題「$x+y\neq 4 \Longrightarrow x\neq 1$ または $y\neq 3$」の逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題４－４**

(1)　命題「$x=1 \Longrightarrow x^2=1$」の逆，裏，対偶を述べよ．

(2)　$x$ は実数．$n$ は自然数とする．次の命題の対偶を述べ，その真偽を調べよ．

　(ア)　$x^2 \geqq 4 \Longrightarrow x \geqq 2$

　(イ)　$x+y=2 \Longrightarrow x \leqq 1$　または　$y \leqq 1$

　(ウ)　$n$ は４の倍数でない $\Longrightarrow$ $n$ は２の倍数でない

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第4講　集合・命題と条件

(1)　10 以下のすべての自然数を全体集合とする．その部分集合 $A$，$B$ について

$$A\cap B=\{3\},\ \overline{A}\cap B=\{4,\ 7,\ 10\},\ \overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 2,\ 5,\ 8\}$$

である．このとき，$A\cap\overline{B}=\{$ ア ，イ $\}$ である．

(2)　$x$ を実数とするとき，次の(i)〜(iii)の条件は $x^2=4$ であるためのどんな条件か．最も適切なものを下の①〜④からそれぞれ選べ．

(i)　$x=2$　は　ウ

(ii)　$x=2$ または $x=-2$　は　エ

(iii)　$|x|\geqq 2$　は　オ

①　必要条件であるが十分条件でない　②　十分条件であるが必要条件でない
③　必要十分条件である　④　必要条件でも十分条件でもない

(3)　$x$，$y$ は実数とする．命題「$x+y\leqq 0 \Longrightarrow x\leqq 0$　または　$y\leqq 0$」の逆は カ ，裏は キ ，対偶は ク である．また，この命題は ケ である． カ 〜 ク に当てはまるものを次の①〜③から， ケ に当てはまるものを④，⑤からそれぞれ選べ．

①　$x+y>0 \Longrightarrow x>0$　かつ　$y>0$　②　$x>0$　かつ　$y>0 \Longrightarrow x+y>0$
③　$x\leqq 0$　または　$y\leqq 0 \Longrightarrow x+y\leqq 0$　④　真　⑤　偽

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第５講　２次関数(1)

**例題５－１**

次の２次関数のグラフをかけ．また，その頂点の座標と軸の方程式を求めよ．

(1)　$y=3(x-1)^2+2$　　(2)　$y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$

**【Point Pickup】**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題５－１**

次の２次関数のグラフをかけ．また，その頂点の座標と軸の方程式を求めよ．

(1)　$y=2(x+2)^2-1$　　(2)　$y=-(x-1)^2-1$

(3)　$y=x^2-1$　　(4)　$y=-\dfrac{1}{3}(x+2)^2$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題５－２**

次の２次関数の頂点の座標と軸の方程式を求めよ.

(1)　$y=x^2+4x+2$　　(2)　$y=-2x^2+2x+1$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題５－２**

次の２次関数の頂点の座標と軸の方程式を求めよ.

(1) $y=x^2+x+1$

(2) $y=-3x^2+6x-3$

(3) $y=2x^2+3x+4$

(4) $y=-\frac{1}{3}x^2-x-6$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題５－３**

(1)　2 次関数 $f(x)=x^2-x+1$ について，$f(1)$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$f(a+1)$ の値を求めよ．

(2)　次の 2 次関数に最大値，最小値があればそれを求めよ．

(ア)　$y=3x^2+2$　　　(イ)　$f(x)=-x^2+2x+2$

【Point Pickup】



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題５－３**

(1)　2 次関数 $f(x)=2x^2-3x+1$ について，$f(0)$，$f(-2)$，$f(a-2)$ の値を求めよ．

(2)　次の 2 次関数に最大値，最小値があればそれを求めよ．

(ア)　$y=x^2+5x+4$　　　　(イ)　$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+4$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題５－４**

関数 $f(x)=x^2+2x-1$ について，次の定義域における最大値，最小値を求めよ．

(1)　$-4 \leqq x \leqq -2$　　(2)　$-3 \leqq x \leqq 0$　　(3)　$-2 \leqq x \leqq 1$　　(4)　$0 \leqq x \leqq 3$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題５－４**

関数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{3}{2}$ について，次の定義域における最大値，最小値を求めよ．

(1)　$4\leqq x\leqq 5$　(2)　$1\leqq x\leqq 4$　(3)　$0\leqq x\leqq 3$　(4)　$-1\leqq x\leqq 0$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第5講　2次関数(1)

(1)　次の放物線の頂点の座標を求めよ．

(i)　$y=-x^2-4x+1$

頂点 $(-$ ア $,$ イ $)$

(ii)　$y=2x^2-5x+2$

頂点 $\left(\dfrac{ウ}{エ},\ -\dfrac{オ}{カ}\right)$

(2)　次の2次関数の最大値，最小値を求めよ．

(i)　$y=2x^2+4x-1$　$(-2 \leqq x \leqq 1)$　　最大値 キ　　最小値 $-$ ク

(ii)　$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x-3$　$(-2 \leqq x \leqq 0)$　　最大値 $-$ ケ　　最小値 $-$ コ

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第6講　2次関数(2)

**例題6－1**

定義域が $0 \leqq x \leqq a$ である関数 $y=x^2-4x$ の最大値および最小値を，次の各場合について求めよ．

(1)　$0 \leqq a < 2$　　(2)　$2 \leqq a < 4$　　(3)　$a=4$　　(4)　$4 < a$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題6－1**

定義域が $1 \leqq x \leqq a$ である関数 $f(x)=-x^2+6x+5$ の最大値および最小値を，次の各場合について求めよ．

(1)　$1 \leqq a < 3$　(2)　$3 \leqq a < 5$　(3)　$a=5$　(4)　$5 < a$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題６－２**

関数 $y=x^2-2ax+1$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最小値を，次の各場合について求めよ．

(1)　$a<0$　　(2)　$0 \leqq a \leqq 2$　　(3)　$2<a$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題６－２**

関数 $f(x)=-2x^2+4ax+4a+1$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値を，次の各場合について求めよ．

(1)　$a<0$　　(2)　$0\leqq a\leqq 1$　　(3)　$1<a$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題６－３**

関数 $y=x^2-2ax+1$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最大値を，次の各場合について求めよ．

(1)　$a<1$　　(2)　$a=1$　　(3)　$1<a$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題６－３**

関数 $f(x)=-2x^2+4ax+4a+1$ の $0\leqq x\leqq 4$ における最小値を，次の各場合について求めよ．

(1)　$a>2$　　(2)　$a=2$　　(3)　$a<2$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題６－４**

次の条件を満たす２次関数の式を求めよ．

(1)　グラフの頂点が $(2,\ 1)$ で，点 $(1,\ 4)$ を通る．

(2)　放物線 $y=-2x^2$ を平行移動したもので，２点 $(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$ を通る．

(3)　グラフが３点　$(-1,\ -3)$，$(1,\ 5)$，$(2,\ 3)$ を通る．

【Point Pickup】



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題６－４**

次の条件を満たす２次関数の式を求めよ.

(1)　$x=-2$ のとき最大値５をとり，グラフが点 $(2,\ -11)$ を通る.

(2)　放物線 $y=2x^2$ を平行移動したもので，グラフの軸が $x=-\dfrac{5}{2}$ であり，$x=-1$ のとき $y=5$.

(3)　グラフが３点 $(1,\ -1)$，$(2,\ 6)$，$(-3,\ -9)$ を通る.

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第6講　2次関数(2)

(1)　2次関数 $y=x^2-2ax+2a+3$ の $0 \leqq x \leqq 4$ における最小値は以下の通り.

$a<0$ のとき　[ア] $a+3$

$0 \leqq a \leqq 4$ のとき　$-a^2+$ [イ] $a+$ [ウ]

$4<a$ のとき　$-$ [エ] $a+19$

(2)　2次関数 $f(x)=2x^2-4ax-3$ の $2 \leqq x \leqq 4$ における最大値は以下の通り.

$a<3$ のとき　$-16a+$ [オカ]

$a=3$ のとき　[キクケ]

$3<a$ のとき　$-8a+$ [コ]



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第７講　２次関数(3)

**例題７－１**

次の２次方程式の実数解の個数を調べよ．また，実数解をもつ場合はその実数解を答えよ．

(1)　$x^2+3x+1=0$

(2)　$9x^2-6x+1=0$

(3)　$3x^2-5x+3=0$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題7－1**

次の2次方程式の実数解の個数を調べよ．また，実数解をもつ場合はその実数解を答えよ．

(1)　$x^2-4x+1=0$

(2)　$-x^2+x-4=0$

(3)　$4x^2-20x+25=0$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題７－２**

2 次関数 $y=x^2+4x+k$ のグラフと $x$ 軸との共有点の個数は，定数 $k$ の値によってどのように変わるか．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題７－２**

2次関数 $y=-x^2+2x+k+3$ のグラフと $x$ 軸との共有点の個数が次のようになるときの，$k$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(1)　2個　(2)　1個　(3)　0個

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題７－３**

次の２次不等式を解け.

(1)　$x^2+x-2>0$　　(2)　$x^2-3x-2\geqq 0$

(3)　$3x^2-10x+3<0$　　(4)　$-x^2+x+1\geqq 0$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題７－３**

次の２次不等式を解け.

(1)　$x^2-7x+10>0$　　(2)　$4x^2-5x-3<0$

(3)　$-x^2+4x+7\geqq 0$　　(4)　$x^2\geqq 8$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題７－４**

(1)　次の 2 次不等式を解け.

　(ア)　$(x-2)^2>0$　　(イ)　$(x-2)^2 \geqq 0$

　(ウ)　$(x-2)^2<0$　　(エ)　$(x-2)^2 \leqq 0$

(2)　次の 2 次不等式を解け.

　(ア)　$x^2-2x+3<0$　　(イ)　$2x^2-5x+4 \geqq 0$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題７－４**

次の２次不等式を解け.

(1)　$4x^2-4x+1>0$

(2)　$-x^2+6x-9\geqq 0$

(3)　$-x^2+x-1>0$

(4)　$x^2-2x+5\geqq 0$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第7講　2次関数(3)

(1)　2次関数 $y=2x^2-4(k-1)x+2k^2-k-1$ のグラフと $x$ 軸との共有点の個数は以下の通り.

$k<$ [ア] のとき [イ] 個　　$k=$ [ア] のとき [ウ] 個

$k>$ [ア] のとき [エ] 個

(2)　2次不等式 $2x^2+5x-3\leqq 0$ の解は $-$[オ]$\leqq x\leqq \dfrac{1}{[カ]}$ である.

(3)　次の2次不等式の解を　①すべての実数　②解なし　より選べ.

(i)　$x^2-x+\dfrac{1}{4}\geqq 0$ [キ]　　(ii)　$x^2-6x+11>0$ [ク]

(iii)　$-x^2+2x-5\geqq 0$ [ケ]

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第８講　２次関数(4)

**例題８－１**

すべての実数 $x$ について $x^2-(k-1)x+3>0$ が成り立つような定数 $k$ の値の範囲を求めよ.

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題８－１**

次の２次不等式がすべての実数 $x$ で成り立つように定数 $a$ の範囲を定めよ.

(1)　$x^2+ax+3>0$　　(2)　$-x^2+2ax-a-2\leqq 0$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題８－２**

2 次方程式 $x^2-x+a=0$，$x^2+2ax-3a+4=0$ について，次の条件を満たす $a$ の値の範囲を求めよ．

(1)　両方とも実数解をもつ　　(2)　一方のみが実数解をもつ

**【Point Pickup】**


本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題８－２**

2 つの 2 次方程式 $x^2+(a+1)x-1+a^2=0$ と $x^2-(1-a)x+(a+1)^2=0$ について，次の条件を満たす $a$ の値の範囲を求めよ．

(1)　ともに実数解をもつ　　(2)　少なくとも一方が実数解をもつ

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題８ー３**

２次方程式 $2x^2-3x-a=0$　が次の条件を満たすとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

(1)　正の解と負の解をもつ．

(2)　$0<x<1$，$1<x<2$ の範囲でそれぞれ１つの実数解をもつ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題８－３**

2 次方程式 $x^2-mx+m+3=0$ が次の条件を満たすとき，定数 $m$ の値の範囲を求めよ．

(1)　$x<-2$，$-2<x$　の範囲に解を１つずつもつ．

(2)　$-4<x<-2$，$0<x<2$　の範囲に解を１つずつもつ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題８－４**

2 次方程式 $x^2+2(a-2)x+a=0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ.

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題8－4**

2次方程式 $x^2+2ax+2a+3=0$ が2より小さい異なる2つの解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第8講　2次関数(4)

(1)　2次不等式 $x^2-ax-2a>0$ がすべての実数 $x$ で成り立つような定数 $a$ の範囲は

　　　[アイ] $<a<$ [ウ]

(2)　2次方程式 $x^2+2(m-1)x+3-m=0$ が次の条件を満たすとき，定数 $m$ の値の範囲をそれぞれ求めよ．

　(i)　正の解と負の解を1つずつもつ．　　$m>$ [エ]

　(ii)　1より小さい異なる2つの解をもつ．　　$m>$ [オ]



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

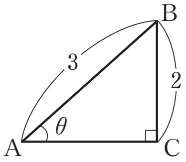
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第９講　三角比(1)

**例題９－１**

右の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ．




**【Point Pickup】**

©RECRUIT HOLDINGS

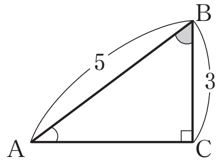
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題９－１**

右の図において，次の値を求めよ．

(1)　$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$

(2)　$\sin B$，$\cos B$，$\tan B$




ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題９－２**

$\sin 30°$，$\cos 30°$，$\tan 30°$　の値を求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題9－2**

次の値を求めよ.

(1)　$\sin 45^\circ$，$\cos 45^\circ$，$\tan 45^\circ$

(2)　$\sin 60^\circ$，$\cos 60^\circ$，$\tan 60^\circ$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題９－３**

$\theta$ は鋭角とする．次の問いに答えよ．

⑴　$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

⑵　$\tan\theta=2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題９－３**

$\theta$ は鋭角とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\tan\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題９－４**

次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ.

(1)　$\sin 70^\circ$　　(2)　$\cos 84^\circ$　　(3)　$\tan 50^\circ$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題９－４**

次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ.

(1)　$\sin 54^\circ$　　(2)　$\cos 88^\circ$　　(3)　$\tan 72^\circ$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

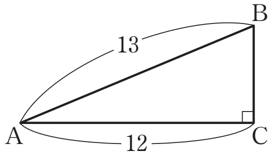
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第９講　三角比(1)

(1)　右図において，

$\sin A = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$，$\cos A = \dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{イウ}}$，$\tan B = \dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}$

である．




(2)　$\theta$ を鋭角とする．$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき　$\cos\theta = \dfrac{\boxed{ケ}}{\sqrt{\boxed{コ}}}$，$\tan\theta = \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第10講　三角比(2)

**例題 10 － 1**

次の値を求めよ.

(1)　$\sin 120°$　(2)　$\sin 135°$　(3)　$\sin 150°$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 10 ー 1**

次の表をうめよ.

| $\theta$ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | | | | | | | | | |

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 10 － 2**

次の値を求めよ.

(1)　$\cos 120^\circ$　　(2)　$\cos 135^\circ$　　(3)　$\cos 150^\circ$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 10 − 2**

次の表をうめよ.

| $\theta$ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $\cos\theta$ | | | | | | | | | |

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 10 − 3**

次の値を求めよ.

(1)　$\tan 120^\circ$　　(2)　$\tan 135^\circ$　　(3)　$\tan 150^\circ$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 10 − 3**

次の表をうめよ.

| $\theta$ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tan\theta$ | | | | | ／ | | | | |

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 10 ー 4**

(1)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とするとき，次の方程式を解け．

(ア)　$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　　(イ)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(ウ)　$\tan\theta = -1$

(2)　次の三角比を $45^\circ$ 以下の角の三角比で表せ．

(ア)　$\sin 140^\circ$　　(イ)　$\cos 155^\circ$　　(ウ)　$\tan 160^\circ$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 10 － 4**

(1)　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とするとき，次の方程式を解け.

(ア)　$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$　(イ)　$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　(ウ)　$\tan\theta = \sqrt{3}$

(2)　次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ.

(ア)　$\sin 168°$　(イ)　$\cos 174°$　(ウ)　$\tan 142°$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 10 講　三角比⑵

次の表の㈠〜㈩に当てはまるものを下の①〜⑨から選べ.

| $\theta$ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | 0 | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | ㈠ | ㈡ | ㈢ | 0 |
| $\cos\theta$ | 1 | ㈣ | ㈤ | ㈥ | ㈦ | ㈧ | ㈨ | ㈩ | $-1$ |

①　$0$　　②　$\dfrac{1}{2}$　　③　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　④　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　⑤　$1$

⑥　$-\dfrac{1}{2}$　　⑦　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　⑧　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　⑨　$-1$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第11講　三角比(3)

**例題 11 − 1**

△ABC において，外接円の半径を $R$ とする．次のものを求めよ．

(1)　$a=5$，$A=30^\circ$，$B=45^\circ$ のとき　$b$

(2)　$b=1$，$c=\sqrt{3}$，$C=120^\circ$ のとき　$B$，$A$

(3)　$a=10$，$A=60^\circ$ のとき　$R$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 11 ー 1**

$\triangle$ABC において，外接円の半径を $R$ とする．次のものを求めよ．

(1)　$b=6$，$A=45°$，$B=60°$ のとき　$a$

(2)　$b=\sqrt{6}$，$c=2$，$C=45°$ のとき　$B$，$A$

(3)　$a=4$，$A=30°$ のとき　$R$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 11 − 2**

△ABC において，次のものを求めよ．

(1)　$a=3$，$b=4$，$C=120^\circ$ のとき　$c$

(2)　$a=13$，$b=7$，$c=15$ のとき　$A$

(3)　$c=2\sqrt{6}$，$a=4$，$C=60^\circ$ のとき　$b$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 11 − 2**

△ABC において，次のものを求めよ．

(1)　$b=3$，$c=2\sqrt{3}$，$A=30^\circ$ のとき　$a$

(2)　$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{10}$，$c=2$ のとき　$B$

(3)　$a=2$，$b=\sqrt{6}$，$B=60^\circ$ のとき　$c$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 11 − 3**

次の各場合について，△ABC の残りの辺と角の大きさを求めよ．

(1)　$a=2\sqrt{3}$，$c=3-\sqrt{3}$，$B=120°$

(2)　$a=8$，$A=45°$，$C=30°$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 11 ー 3**

次の各場合について，△ABC の残りの辺と角の大きさを求めよ．

(1)　$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}-1$，$A=135^\circ$

(2)　$a=\sqrt{2}$，$B=45^\circ$，$C=105^\circ$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 11 － 4**

次のような $\triangle ABC$ の面積 $S$ を求めよ.

(1)　$a=6$, $b=5$, $C=30°$

(2)　$a=6$, $b=7$, $c=11$

**【Point Pickup】**


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 11 － 4**

次のような △ABC の面積 $S$ を求めよ.

(1)　$a=2\sqrt{2}$，$c=3$，$B=45°$

(2)　$a=8$，$b=6$，$c=4$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第11講　三角比(3)

(1)　△ABCにおいて，外接円の半径を$R$とする．$B=60^\circ$，$C=75^\circ$，$b=2\sqrt{6}$のとき，
$a=$ ア ，$R=$ イ $\sqrt{\text{ウ}}$ である．

(2)　△ABCにおいて　$a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{3}-1$，$C=45^\circ$のとき，$c=$ エ である．

(3)　△ABCにおいて　$a=7$，$c=5$，$A=60^\circ$のとき，$b=$ オ である．また，△ABCの面積は カキ $\sqrt{\text{ク}}$ である．

(4)　$a=3$，$b=6$，$c=7$である△ABCの面積は ケ $\sqrt{\text{コ}}$ である．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第12講　平面図形(1)

**例題 12 － 1**

(1)　3辺の長さが $x$，2，3である三角形が存在するときの $x$ の範囲を求めよ．

(2)　長さが3，4，6の線分を3辺とする三角形は存在するか．存在する場合は，その三角形が鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるか答えよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 12 ― 1**

(1)　3辺の長さが $x$，3，5である三角形が存在するときの $x$ の範囲を求めよ．

(2)　次の長さの線分を3辺とする三角形は存在するか．存在する場合は，その三角形が鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるか答えよ．

(ア)　4，5，6　　　　(イ)　5，9，15

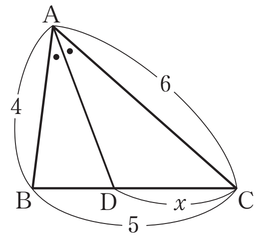


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 12 － 2**

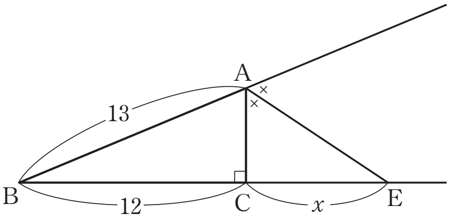
次の図において，$x$ の値を求めよ．

(1)




AD は ∠A の二等分線

(2)




AE は ∠A の外角の二等分線

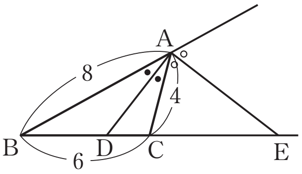
**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 12 ー 2**

AB＝8, BC＝6, CA＝4 である △ABC において ∠A およびその外角の二等分線が直線 BC と交わる点をそれぞれ D, E とする．次の問いに答えよ．




(1)　線分 BD の長さを求めよ．

(2)　線分 CE の長さを求めよ．

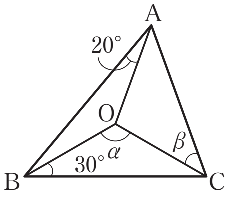


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

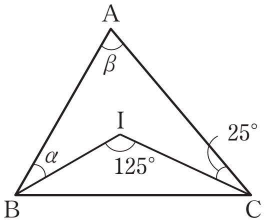
**例題 12 － 3**

下の図において，点 O は △ABC の外心，点 I は △ABC の内心である．角 $\alpha$，$\beta$ を求めよ．

(1)




(2)



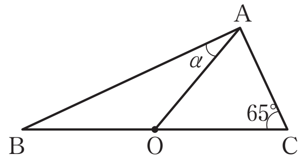

**【Point Pickup】**


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

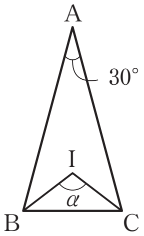
**類題 12 ー 3**

下の図において，点 O は △ABC の外心，点 I は △ABC の内心である．角 $\alpha$ を求めよ．

(1)




(2)





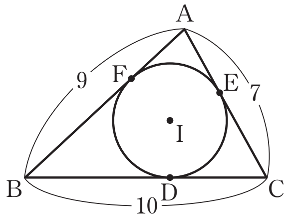

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 12 － 4**

AB＝9，BC＝10，CA＝7 の △ABC の内接円の中心を I とし，この内接円が辺 BC，CA，AB と接する点をそれぞれ D，E，F とする．次の問いに答えよ．

(1)　AF の長さを求めよ．

(2)　△ABC の面積は $6\sqrt{26}$ である．これを利用して，△ABC の内接円の半径 $r$ を求めよ．




**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 12 ー 4**

AB＝13, BC＝12, CA＝5 の △ABC の内接円の中心をＩとし，この内接円が辺 BC, CA, AB と接する点をそれぞれ D，E，F とする．次の問いに答えよ．

(1)　AF の長さを求めよ．

(2)　△ABC は鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれかを答えよ．また，内接円の半径 $r$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

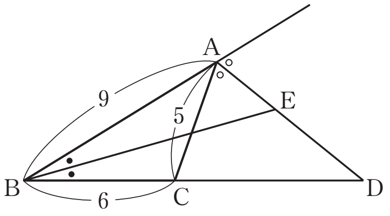
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 12 講　平面図形(1)

(1)　3 辺の長さが $x$, 2, 5 である三角形が存在する $x$ の範囲は［ア］$<x<$［イ］である.

(2)　右図において，∠A の外角の二等分線と直線 BC との交点を D，∠B の二等分線と直線 AD との交点を E とする．このとき　CD＝$\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$,

AE：ED＝［カ］：［キ］である.




(3)　AB＝5，BC＝4，CA＝3 の △ABC の内接円の中心を I とし，半径を $r$ とする．また，この内接円が辺 BC，CA，AB と接する点をそれぞれ D，E，F とする．このとき BF＝［ク］，$r$＝［ケ］である.



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

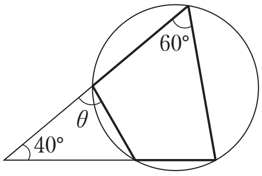
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第13講　平面図形(2)

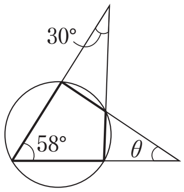
**例題 13 − 1**

(1)　次の図において，角 $\theta$ の大きさを求めよ.

(ア)

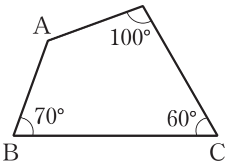



(イ)

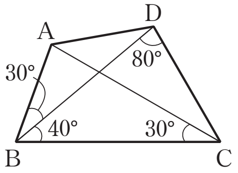



(2)　次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものを選べ.

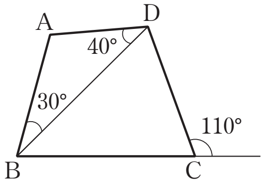
①




②




③




## 【Point Pickup】

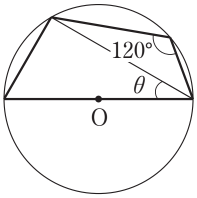


©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

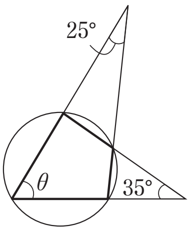
**類題 13 ー 1**

(1)　次の図において，角 $\theta$ の大きさを求めよ．ただし，O は円の中心とする．

(ア)

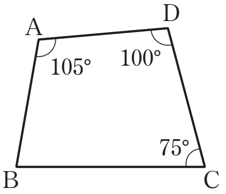



(イ)

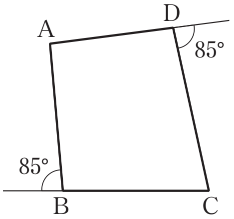



(2)　次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものを選べ．

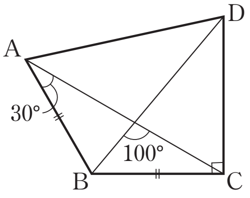
①




②




③



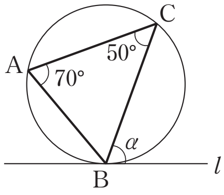

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 13 － 2**

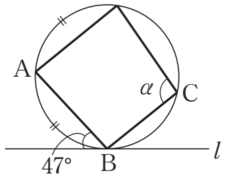
下の図において，角 $\alpha$ を求めよ．ただし，直線 $l$，$m$ は円の接線である．

(1)



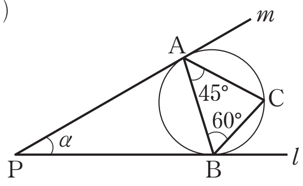

点 B は円の接点

(2)




点 B は円の接点，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$

(3)




点 A，B は円の接点

【Point Pickup】

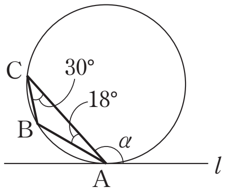


©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 13 ー 2**

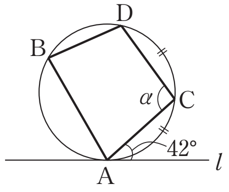
下の図において，角 $\alpha$ を求めよ．ただし，直線 $l$，$m$ は円の接線である．

(1)



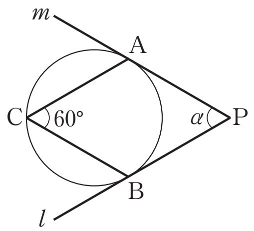

点 A は円の接点

(2)




点 A は円の接点，$\overset{\frown}{\mathrm{CA}}=\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$

(3)




点 A，B は円の接点

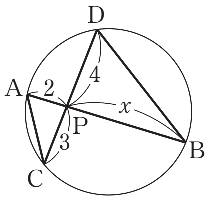
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

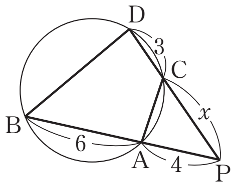
**例題 13 ー 3**

次の図において，$x$ の値を求めよ．

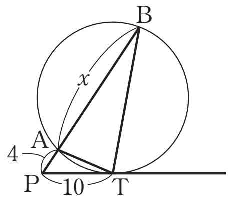
(1)




(2)




(3)




PT は円の接線．T は接点

**【Point Pickup】**

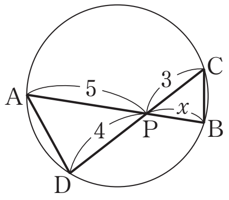


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

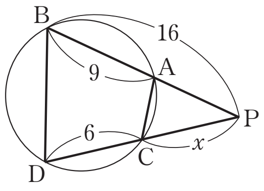
**類題 13 － 3**

次の図において，$x$ の値を求めよ．

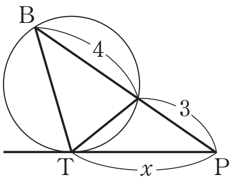
(1)




(2)




(3)




PT は円の接線．T は接点

©RECRUIT HOLDINGS

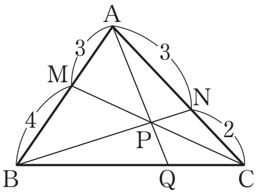
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 13 ー 4**

右の図において，次の問いに答えよ．

(1)　BQ：QC を求めよ．

(2)　CP：PM，BP：PN を求めよ．



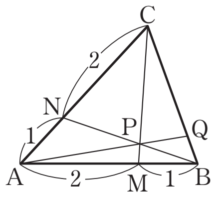

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 13 ー 4**

右の図において，次の問いに答えよ．




(1)　BQ：QC を求めよ．

(2)　BP：PN，CP：PM を求めよ．

(3)　QP：PA を求めよ．

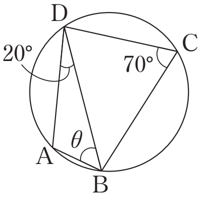
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 13 講　平面図形(2)

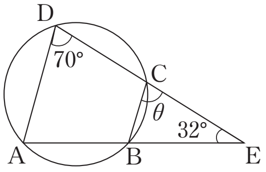
(1)　下の図において，$\theta$ を求めよ．ただし，(iii)において　$l$ は円の接線，点 A は接点である．

(i)



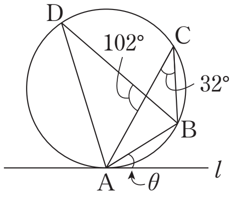

$\theta$＝ アイ °

(ii)




$\theta$＝ ウエ °

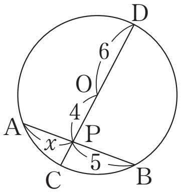
(iii)




$\theta$＝ オカ °

(2)　下図において，$x$ を求めよ．

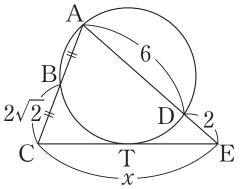
(i)




点 O は
円の中心

$x$＝ キ

(ii)



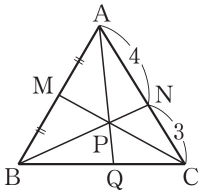

CE は円の接線
T は接点

$x$＝ ク

(3)　右図において

MP：PC＝ ケ ： コ ，

BQ：QC＝ サ ： シ 　である．




ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 14 講　場合の数(1)

**例題 14 ー 1**

1 から 100 までの整数のうち，次の数の個数を求めよ．

(1)　3 の倍数

(2)　5 の倍数でない数

(3)　15 の倍数

(4)　3 または 5 の倍数

**【Point Pickup】**



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 14 ー 1**

1 から 100 までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ．

⑴　2 の倍数

⑵　14 の倍数

⑶　2 または 7 の倍数



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 14 ー 2**

大小 2 つのさいころを投げるとき，次のようになる場合は何通りあるか.

(1)　目の和が 6 または 9

(2)　目の和が 10 以下

(3)　目の積が奇数

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 14 ー 2**

1個のさいころを2回投げるとき，次のようになる場合は何通りあるか.

(1)　目の和が5の倍数

(2)　目の和が5以上

(3)　目の積が偶数

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 14 ー 3**

(1)　$a$，$b$，$c$，$d$ の 4 つの文字から 2 文字を選んで 1 列に並べる方法は何通りあるか．また，この 4 つの文字をすべて使って 1 列に並べる方法は何通りあるか.

(2)　6 個の数字 1，2，3，4，5，6 から異なる 3 個を選んで 3 桁の整数を作るとき，偶数は何個できるか.

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 14 ー 3**

⑴　6人の生徒から委員長，副委員長，書記，会計を選ぶ方法は何通りあるか.

⑵　5個の数字1，2，3，4，5をすべて使ってつくる5桁の整数について，次のものはいくつできるか.

㈠　5桁の整数の総数　　　㈡　奇数

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 14 － 4**

男子 4 人，女子 2 人が 1 列に並ぶとき，次の問いに答えよ．

(1)　両端が女子である並び方は何通りあるか．

(2)　女子 2 人が隣り合う並び方は何通りあるか．

(3)　女子が隣り合わない並び方は何通りあるか．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 14 ー 4**

男子 3 人，女子 4 人が 1 列に並ぶとき，次の問いに答えよ．

(1)　両端が男子である並び方は何通りあるか.

(2)　男子 3 人が隣り合う並び方は何通りあるか.

(3)　男子が隣り合わない並び方は何通りあるか.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第14講　場合の数(1)

(1)　1から100までの整数のうち，2または3の倍数は アイ 個ある．

(2)　大小2個のさいころを投げるとき，目の和が4の倍数にならないのは ウエ 通りある．

(3)　男子3人，女子2人が1列に並ぶとき，両端が男子である並び方は オカ 通り，女子2人が隣り合う並び方は キク 通り，男女が交互に並ぶ並び方は ケコ 通りである．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 15 講　場合の数(2)

**例題 15 − 1**

(1)　4 問のクイズに○×で答えるとき，○，×のつけ方は何通りあるか．

(2)　1，2，3 の 3 個の数字で 5 桁の数字をつくる．同じ数字を重複して用いてよいとするとき，全部でいくつできるか．またそのうち奇数はいくつできるか．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 15 － 1**

(1)　7 種類の異なる果物がある．これらを組み合わせて最大 7 個の果物が入ったセットを 1 つ作りたい．何通りのセットができるか．ただし，最低でも 1 つの果物は入れることとし，同じ種類の果物を 2 個以上入れないものとする．

(2)　0，1，2，3，4 の 5 種類の数字で 4 桁の整数を作るとき，偶数は何通りできるか．ただし，数字は重複して用いてもよいとする．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 15 ー 2**

(1)　両親と子供 4 人の 6 人が円形のテーブルに向かって座るとする．次のような座り方は何通りあるか．

(ア)　6 人全員の座り方．　　(イ)　両親が隣り合わない座り方．

(2)　異なる 5 色の玉を机の上に円形に並べる方法は何通りあるか．また，これらを糸でつなげて首飾りを作るとき，何通りの首飾りができるか．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 15 ー 2**

父，母，息子 2 人，娘 2 人が円形のテーブルに向かって座るとする．

(1)　女性が隣り合わない方法は何通りあるか．

(2)　両親が向かい合う方法は何通りあるか．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 15 ー 3**

(1)　$a$，$a$，$a$，$a$，$b$，$b$，$b$，$c$ の 8 文字を 1 列に並べる方法は何通りあるか.

(2)　6 個の数字 1，1，1，2，3，4 を 1 列に並べて 6 桁の整数を作るとき，次の問いに答えよ.

(ア)　奇数は何通りできるか.

(イ)　3 が 4 より左側にある並べ方は何通りあるか.

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 15 ー 3**

SAITAMA の 7 文字を 1 列に並べるとき，次の問いに答えよ.

(1)　すべての並べ方は何通りあるか.

(2)　子音が隣り合わない並べ方は何通りあるか.

(3)　S，I，T がこの順に並ぶ並べ方は何通りあるか.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

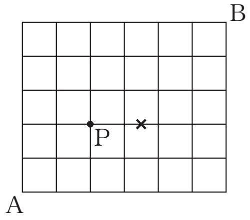
**例題 15 － 4**

右の図のような道のある町で，A から B までの最短経路のうち，次のものの総数を求めよ．

(1)　最短経路すべて

(2)　P を通らない

(3)　P を通り，×を通らない



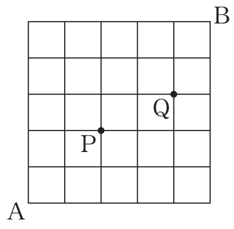

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 15 ー 4**

右の図のような道のある町で，A から B までの最短経路のうち，次のものの総数を求めよ．




(1)　最短経路すべて

(2)　Q を通る

(3)　P または Q を通る

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

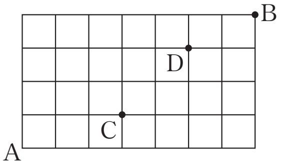
# 第15講　場合の数(2)

(1)　3人の選手が4つの野球チームA，B，C，Dに入るとき，その入り方は［アイ］通りある．

(2)　$a$，$b$，$c$，$d$，$e$，$f$ の6色の玉がある．これを円形に並べるとき，$a$，$b$，$c$ が隣り合う並べ方は［ウエ］通りである．

(3)　5個の数字1，1，1，2，3を使って5桁の整数を作るとき，奇数は［オカ］個できる．
また，2，3の順に並ぶ並び方は［キク］個できる．

(4)　右図のように，格子状の道路がある．AからBに至る最短経路を考えるとき，CまたはDを通るものは［ケコサ］通りである．






ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 16 講　場合の数(3)

**例題 16 − 1**

男子 6 人，女子 4 人から次のように 4 人選ぶ方法は何通りあるか.

(1)　男女問わず 4 人選ぶ.

(2)　男子 2 人，女子 2 人選ぶ.

(3)　女子を少なくとも 1 人選ぶ.

(4)　ある特定の 1 人 $a$ を含むように選ぶ.

【Point Pickup】



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 16 ー 1**

男女ともに5人の合計10人から5人を選ぶ．次のような選び方は何通りあるか.

(1)　少なくとも1人の男子を選ぶ.

(2)　女子を2人以上選ぶ.

(3)　男子3人，女子2人を選び，1列に並べる.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 16 － 2**

正六角形について，次の問いに答えよ．

(1)　対角線の本数を求めよ．

(2)　正六角形の頂点のうちの3個を頂点とする三角形の個数を求めよ．

(3)　(2)のうち，もとの正六角形と辺を共有しないものの個数を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 16 − 2**

(1)　7本の平行線が，4本の平行線と交わっている．これらの平行線によってできる平行四辺形は何個あるか．

(2)　正八角形の頂点のうち3つを結んでできる三角形のうち，正八角形と辺を共有しない三角形の個数を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 16 － 3**

8個の異なるお菓子を次のように分ける方法は何通りあるか.

(1)　5個，2個，1個の3組に分ける.

(2)　2個ずつ4人の子供に分ける.

(3)　4個ずつ2組に分ける.

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 16 ー 3**

9 人を次のように分ける方法は何通りあるか.

(1)　4 人，3 人，2 人の 3 組に分ける.

(2)　3 人ずつ 3 組に分ける.

(3)　5 人，2 人，2 人の 3 組に分ける.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 16 － 4**

(1)　りんご，みかん，メロンの 3 種類の果物から，重複を許して 6 個を取る組合せは何通りあるか．ただし，1 つも取らない果物があってもよいとする．

(2)　桃 5 個を 7 人に分ける方法は何通りあるか．ただし，桃を 2 個以上もらう人や，1 個ももらわない人がいてもよい．

**【Point Pickup】**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 16 ー 4**

(1)　袋の中に赤球，青球，白球，黒球がたくさん入っている．この袋から9個の球を取り出すとき，球の取り出し方は何通りあるか.

(2)　7冊の本を3人に分けるとき，3人のもらう本の冊数を決める方法は何通りあるか.ただし本を1冊ももらわない人がいてもよい.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 16 講　場合の数(3)

(1)　1 枚のコインを 7 回投げるとき，表が 5 回出る場合は **アイ** 通りある.

(2)　10 個の異なる色の玉を 6 個, 4 個の 2 組に分ける方法は **ウエオ** 通りであり, 5 個, 5 個の 2 組に分ける方法は **カキク** 通りである.

(3)　区別のつかない 8 個の球を，箱 A，B，C，D に分ける方法は **ケコサ** 通りある. ただし，空箱ができてもよいものとする.



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 17 講　確率(1)

**例題 17 − 1**

次の確率を求めよ.

(1)　2 つのさいころを同時に投げるとき，目の和が 5 になる確率.

(2)　3 つのさいころを同時に投げるとき，目の和が 5 になる確率.

(3)　HAKATA の 6 文字を 1 列に並べるとき，母音と子音が交互に並ぶ確率.

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 17 ー 1**

(1)　3 つのさいころを同時に投げるとき，目の和が 6 になる確率を求めよ.

(2)　SAPPORO の 7 文字を 1 列に並べるとき，母音と子音が交互に並ぶ確率を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 17 ー 2**

(1)　赤球 5 個，白球 3 個が入った袋の中から 3 個の球をとり出すとき，赤球 2 個，白球 1 個が出る確率を求めよ.

(2)　3 人で 1 回じゃんけんをするとき，次の確率を求めよ.

(ア)　1 人だけが勝つ確率.　　　(イ)　あいこになる確率.

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 17 ー 2**

(1)　10 本中 3 本が当たりのくじがある．このくじから同時に 3 本引くとき，1 本だけ当たる確率を求めよ．

(2)　A，B，C，D の 4 人で 1 回じゃんけんをするとき，次の確率を求めよ．

(ア)　A だけが負ける確率．　　(イ)　あいこになる確率．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 17 － 3**

1のカードが 5 枚，2のカードが 4 枚，3のカードが 3 枚，合計 12 枚のカードがある．この中から同時に 3 枚のカードを取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1)　3 枚のカードの数がすべて同じである確率.

(2)　3 枚中 2 枚のみ同じ数のカードである確率.

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 17 ー 3**

白球6個，黒球4個，赤球3個，青球1個が1つの袋の中に入っている．この袋の中から同時に3個の球を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1)　3個の球の色がすべて同じ確率.

(2)　赤球が少なくとも1つ含まれる確率.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 17 ー 4**

(1)　A の袋には白球 6 個，黒球 4 個，B の袋には白球 7 個，黒球 3 個が入っている．A の袋から 3 個，B の袋から 2 個の球を取り出すとき，全部黒球である確率を求めよ．

(2)　さいころを 2 回投げるとき，次の確率を求めよ．

　(ア)　1 回目は 2 の倍数の目，2 回目は 3 以上の目が出る確率．

　(イ)　少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 17 ー 4**

(1)　A の袋には赤球 7 個，青球 4 個，B の袋には赤球 6 個，青球 5 個が入っている．A，B の袋から 1 個ずつ球を取り出すとき，球の色が異なる確率を求めよ．

(2)　さいころを 3 回投げるとき，次の確率を求めよ．

(ア)　出た目が順に 1，2，3 である確率.

(イ)　少なくとも 1 回は 3 の倍数の目が出る確率.


©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 17 講　確率(1)

(1)　さいころを 3 回投げるとき，目の和が 7 になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である.

(2)　赤球 4 個，白球 3 個，青球 2 個，黒球 1 個が入った袋から同時に 3 個の球を取り出すとき，色がすべて異なる確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$，青球が少なくとも 1 つ含まれる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である.

(3)　ジョーカーを除く 52 枚のトランプから 1 枚抜き取り，カードを見てからもとに戻すことを 3 回行うとき，3 回目に初めてスペードが出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第18講　確率(2)

**例題 18 − 1**

1個のさいころを5回投げるとき，次の問いに答えよ．

(1)　3の倍数の目がちょうど3回出る確率を求めよ．

(2)　3の倍数の目が3回以上出る確率を求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 18 ー 1**

1 個のさいころを 4 回投げるとき，次の確率を求めよ.

(1)　5 以上の目がちょうど 2 回出る確率.

(2)　4 回目に 2 度目の 5 の目が出る確率.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 18 － 2**

数直線上を動く点 P が原点にある．1 枚の硬貨を投げて，表が出たら正の方向に 3，裏が出たら負の方向に 2 進む．コインを 5 回投げるとき，点 P が原点に戻っている確率を求めよ．

**【Point Pickup】**

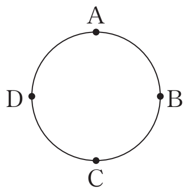


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 18 － 2**

(1)　数直線上を動く点Ｐが原点の位置にある．1 個のさいころを投げて 4 以下の目が出たら正の向きに 2，5 以上の目が出たら負の向きに 1 だけ進む．さいころを 4 回投げたとき，点Ｐが座標 2 のところにいる確率を求めよ．

(2)　右図において，点ＰはＡを出発点として確率 $\dfrac{2}{3}$ で右回りに 1 つ次の点に移り，確率 $\dfrac{1}{3}$ で左回りに 1 つ次の点に移る．3 回の移動で，点Ｐが点Ｂにいる確率を求めよ．






ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 18 − 3**

(1)　男子 64 人，女子 36 人のうち，徒歩で通学している人が男子 25 人，女子 15 人であった．この男女 100 人の中から選ばれた 1 人が男子のとき，その人が徒歩で通学している確率を求めよ．

(2)　白球 5 個と赤球 3 個が入った袋から球を 1 個取り出し，それをもとに戻さずもう 1 個取り出す．1 回目に白球が出たとき，2 回目に赤球が出る確率を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 18 － 3**

(1)　男子46人，女子54人があるクイズを行ったところ，男子の正解者は 30人，女子の正解者は 36人であった．この男女 100 人の中から選ばれた 1 人が不正解者であるとき，その人が女子である確率を求めよ．

(2)　白球 7 個と赤球 2 個が入った袋から球を 1 個取り出し，それをもとに戻さずもう 1 個取り出す．1 回目に白球が出たとき，2 回目も白球が出る確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 18 ー 4**

(1)　10 本のくじのうち，4 本が当たりくじである．このくじを A，B が順に 1 本ずつ引くとき，次の問いに答えよ．ただし，一度引いたくじはもとに戻さない．

(ア)　A，B ともに当たる確率.　　(イ)　B が当たる確率.

(2)　赤球 6 個と白球 3 個が入った袋 A と，赤球 3 個と白球 4 個が入った袋 B がある．袋 A から 1 球取り出し，それを袋 B に入れた後に袋 B から 2 球同時に取り出すとき，2 球とも赤球である確率を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 18 − 4**

(1)　1から20までの数字が書かれた20枚のカードから，もとに戻さずに1枚ずつ2枚引くとき，2枚目が3の倍数である確率を求めよ．

(2)　赤球3個と白球2個が入った袋Aと，赤球2個と白球2個が入った袋Bがある．袋Aから1球取り出し，それを袋Bに入れた後に袋Bから球を1球取り出すとき，それが白球である確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 18 講　確率(2)

(1)　引き分けのないゲームでAがBに勝つ確率は $\dfrac{2}{3}$ である．AとBがゲームをし，先に3ゲーム勝った方を優勝とする．このとき，4ゲーム目でAが優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である．

(2)　硬貨を投げて表が出たら前に2 m，裏が出たら後ろに1 m進む．硬貨を6回投げたとき，前に9 m以上進んでいる確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

(3)　10本のくじの中に当たりが2本ある．引いたくじをもとに戻さずA，B，Cの3人がこの順に1本ずつ引くとき，Bが当たる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$，Cが当たる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >


©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第19講　図形と方程式(1)

**例題 19 − 1**

2点 A$(-3,\ 2)$，B$(4,\ 5)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　線分 AB の長さを求めよ．

(2)　線分 AB を 2：1 に内分する点 C の座標を求めよ．

(3)　線分 AB を 3：1 に外分する点 D の座標を求めよ．

**【Point Pickup】**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 19 ー 1**

3 点 A$(-1,\ 2)$，B$(4,\ 5)$，C$(6,\ -1)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　線分 BC の中点 M の座標を求めよ．

(2)　△ABC の重心 G の座標を求めよ．

(3)　線分 AB を 1：3 に外分する点 D の座標を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 19 ― 2**

次の直線の方程式を求めよ.

(1)　点 $(2,\ 3)$ を通り，傾きが $4$ の直線

(2)　$2$ 点 $(-1,\ 2)$，$(2,\ 8)$ を通る直線

(3)　点 $(3,\ 5)$ を通り，$x$ 軸に垂直な直線

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 19 ー 2**

次の直線の方程式を求めよ.

⑴　点 $(5,\ -3)$ を通り，傾きが $-2$ の直線

⑵　2 点 $(-4,\ 3)$，$(6,\ -3)$ を通る直線

⑶　点 $(1,\ 2)$ を通り，$x$ 軸に平行な直線

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 19 ー 3**

次の直線の方程式を求めよ.

(1)　点 (1, 3) を通り, 直線 $5x-2y-1=0$ に平行な直線

(2)　点 $(-2,\ 1)$ を通り, 直線 $3x-y-12=0$ に垂直な直線

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 19 － 3**

次の直線の方程式を求めよ.

(1)　点 $(-2,\ 5)$ を通り，直線 $3x+5y+1=0$ に平行な直線

(2)　点 $(2,\ 1)$ を通り，直線 $3x+4y+5=0$ に垂直な直線

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 19 ー 4**

⑴　点 $(1,\ 2)$ と直線 $3x-2y+4=0$ の距離を求めよ．

⑵　点 $(-1,\ 2)$ と直線 $y=3x+1$ の距離を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 19 ー 4**

(1)　点 $(3,\ 7)$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ の距離を求めよ．

(2)　3 直線 $x-3y=-5$　……①，$4x+3y=-5$　……②，$2x-y=5$　……③　について，直線①と②，直線②と③，直線③と①の交点をそれぞれ A，B，C とする．次のものを求めよ．

(ア)　交点 A，B，C の座標　　(イ)　点 A と直線 BC の距離

(ウ)　△ABC の面積



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 19 講　図形と方程式(1)

(1)　2 点 A(5, −2), B(−1, 4) について, 線分 AB を 2：1 に内分する点の座標は ( ア , イ ) である.

(2)　直線 $3x-y-7=0$ に垂直で, 点 (−2, 4) を通る直線の方程式は $x+$ ウ $y-$ エオ $=0$ である.

(3)　3 点 A(−4, 3), B(−1, 2), C(3, −1) について, BC＝ カ であり, 直線 BC の方程式は キ $x+$ ク $y-$ ケ $=0$ である. よって, 点 A と直線 BC の距離は コ である. したがって, △ABC の面積は $\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}$ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 20 講　図形と方程式(2)

**例題 20 − 1**

(1)　次の円の方程式を求めよ.

　(ア)　中心が $(3,\ -1)$，半径が $5$　　(イ)　原点が中心，点 $(2,\ 3)$ を通る

(2)　方程式 $x^2+y^2-6x+10y+16=0$ はどのような図形を表すか.

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 20 ー 1**

(1)　次の円の方程式を求めよ.

　(ア)　点 $(3,\ -1)$ を中心とし，$x$ 軸に接する

　(イ)　2 点 $(-6,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を直径の両端とする

(2)　方程式 $x^2+y^2+5x-3y+6=0$　はどのような図形を表すか.

(3)　方程式 $x^2+2x+y^2+k=0$ が円を表すとき，定数 $k$ のとりうる値の範囲を求めよ.



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 20 － 2**

(1)　円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=-x+1$ の共有点の座標を求めよ．

(2)　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ について，次の条件を満たすような $k$ の値および値の範囲を求めよ．

(ア)　異なる２点で交わる　　(イ)　１点で接する　　(ウ)　共有点をもたない

**【Point Pickup】**



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 20－2**

(1)　円 $x^2+y^2=2$ と直線 $2x-y+3=0$ の共有点の座標を求めよ.

(2)　円 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ と直線 $y=x+m$ が異なる2点で交わるとき，定数 $m$ のとりうる値の範囲を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 20 － 3**

(1)　円 $x^2+y^2=25$ 上の点 (3, 4) における接線の方程式を求めよ.

(2)　点 (2, －1) から円 $x^2+y^2=4$ に引いた接線の方程式を求めよ.

**【Point Pickup】**


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 20 ー 3**

⑴　円 $x^2+y^2=20$ 上の点 $(-2,\ -4)$ における接線の方程式を求めよ．

⑵　点 $(1,\ 5)$ から $x^2+y^2=13$ に引いた接線の方程式を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 20 ー 4**

2 円 $x^2+y^2=10$, $x^2+y^2-2x+6y+2=0$ について，次の問いに答えよ.

(1)　2 円の共有点の座標を求めよ.

(2)　2 円の共有点を通る直線の式を求めよ.

(3)　2 円の共有点と原点を通る円の中心の座標と半径を求めよ.

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 20 ー 4**

2円 $x^2+y^2-6x+5=0$，$x^2+y^2-2x-2y+1=0$ について，次の問いに答えよ．

(1)　2円の共有点を通る直線の式を求めよ．

(2)　2円の共有点と点 $(1,\ 3)$ を通る円の中心の座標と半径を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第20講　図形と方程式(2)

(1)　円 $x^2+y^2+4x-6y=0$ と中心が同じで，点 (2，1) を通る円の方程式は

$(x+\boxed{\text{ア}})^2+(y-\boxed{\text{イ}})^2=\boxed{\text{ウエ}}$　である．

(2)　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=mx+2$ が共有点をもつときの定数 $m$ の値の範囲は

$m\leqq-\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$，$\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\leqq m$　である．

(3)　点 (4，2) を通り，円 $x^2+y^2=4$ に接する直線の方程式は

$y=\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}x-\boxed{\text{ク}}y-\boxed{\text{ケコ}}=0$　である．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第21講　図形と方程式(3)

**例題21－1**

次の条件を満たす点Pの軌跡を求めよ.

(1)　2点A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 2)$から等距離にある点P

(2)　2点A$(-2,\ 0)$, B$(1,\ 0)$からの距離の比が$2:1$である点P

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 21 ー 1**

2 点 A$(-4,\ 0)$，B$(2,\ 0)$ について，次の条件を満たす点Ｐの軌跡を求めよ.

(1)　2 点 A，B から等距離にある点Ｐ

(2)　2 点 A，B からの距離の比が 3：1 にある点Ｐ

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題21－2**

(1)　実数 $a$ の値が変化するとき，放物線 $y=x^2-2ax+1$ の頂点Pの軌跡を求めよ．

(2)　$m$ が実数のとき，円 $x^2+y^2+2(m+2)x-6my=0$ の中心Pの軌跡を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 21 − 2**

(1)　$a$ が実数のとき，放物線 $y=x^2-4ax-8a$ の頂点 P の軌跡を求めよ.

(2)　実数 $m$ が変化するとき，円 $x^2+y^2+3mx-2m^2y+m^4+2m^2-1=0$ の中心が描く軌跡 P を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 21 － 3**

次の不等式の表す領域を図示せよ.

(1)　$y<2x+1$　　(2)　$y\leqq x^2-x-2$　　(3)　$x^2+(y-2)^2\leqq 1$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 21 － 3**

次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1)　$2x+3y-6 \geqq 0$　　(2)　$y < -x^2+3x$　　(3)　$(x-2)^2+(y-1)^2 < 1$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 21 － 4**

$x$，$y$ が 4 つの不等式　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y \leqq 8$，$2x+3y \leqq 12$ を同時に満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　4 つの不等式の表す領域を $D$ とする．$D$ を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 $D$ に属するとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 21 － 4**

$x$，$y$ が 4 つの不等式　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+3y \leqq 6$，$2x+y \leqq 7$ を同時に満たすとき，$3x+2y$ の最大値，最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第21講　図形と方程式(3)

(1)　2点A(0, 2), B(4, 0)から等距離にある点Pの軌跡は，直線 $y=$ ア $x-$ イ である．

(2)　放物線 $y=x^2-2(a+1)x+3a^2-a$ の頂点Pが描く軌跡は，放物線 $y=$ ウ $x^2-$ エ $x+$ オ である．

(3)　$x$, $y$ が4つの不等式 $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $2x+y\leqq 5$, $x+3y\leqq 6$ を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値は $\dfrac{\text{カキ}}{\text{ク}}$，最小値は ケ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 22 講　三角関数(1)

**例題 22 － 1**

(1)　次の角の動径を図示せよ．また，角を弧度法で表せ．

　(ア)　$72°$　　(イ)　$420°$　　(ウ)　$-200°$

(2)　半径 6，中心角 $\dfrac{\pi}{3}$ の扇形の弧の長さおよび面積を求めよ．

**【Point Pickup】**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 22 ー 1**

(1)　次の角の動径を図示せよ．また，角を弧度法で表せ．

(ア)　$225^\circ$　　(イ)　$800^\circ$　　(ウ)　$-510^\circ$

(2)　半径 4，中心角 $\dfrac{5}{6}\pi$ の扇形の弧の長さおよび面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 22 － 2**

(1)　$\theta=-\dfrac{3}{4}\pi$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\theta$ の動径が第 3 象限にあり，$\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 22 － 2**

(1)　$\theta=\frac{7}{3}\pi$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$，　$\cos\theta=\frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 22 － 3**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け.

(1)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\tan\theta = -\sqrt{3}$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 22 − 3**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け.

(1)　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan\theta = \sqrt{3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 22 － 4**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け.

(1)　$\sin\theta \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\theta > \dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan\theta \geqq 1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 22 － 4**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け.

(1)　$\sin\theta < \dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\tan\theta < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第22講　三角関数(1)

(1)　半径10，中心角 $\frac{\pi}{5}$ の扇形の弧の長さは $\boxed{\text{ア}}\pi$，面積は $\boxed{\text{イウ}}\pi$ である．

(2)　$\theta$ の動径が第3象限にあり，$\sin\theta=-\frac{1}{4}$ のとき，$\cos\theta=\frac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{4}$ である．

(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け．

（i）$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$\theta=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi,\ \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$　（$\boxed{\text{キ}}<\boxed{\text{ケ}}$ とする）

（ii）$\cos\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{\boxed{\text{コ}}},\ \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi<\theta<2\pi$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 23 講　三角関数(2)

**例題 23 − 1**

次の関数のグラフをかけ．また，その周期と値域を求めよ．

(1)　$y=2\sin\theta$

(2)　$y=\sin\theta+1$

(3)　$y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(4)　$y=\sin 2\theta$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 23 − 1**

次の関数のグラフをかけ．また，その周期と値域を求めよ．

(1)　$y=-\sin\theta$

(2)　$y=\sin\theta-1$

(3)　$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(4)　$y=\sin\dfrac{\theta}{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 23 ー 2**

次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

(1)　$y=\frac{1}{2}\cos\theta$　　(2)　$y=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$　　(3)　$y=\cos\frac{\theta}{2}$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 23 － 2**

次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

(1)　$y=-3\cos\theta$　　(2)　$y=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(3)　$y=\cos 3\theta$


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 23 ー 3**

$\alpha$ が鋭角，$\beta$ が鈍角で，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$ のとき，次の値を求めよ．

(1)　$\sin(\alpha+\beta)$　　　(2)　$\cos(\alpha-\beta)$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 23 － 3**

$\alpha$ の動径が第 3 象限，$\beta$ の動径が第 2 象限にあり，$\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ．

(1)　$\sin(\alpha-\beta)$　　　(2)　$\cos(\alpha+\beta)$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 23 ー 4**

(1)　$y=\tan 2\theta$ のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

(2)　$y=2x$，$y=-3x$ のなす鋭角 $\theta$ を求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 23 ー 4**

(1)　$y=\tan\dfrac{\theta}{2}$ のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

(2)　$y=(2+\sqrt{3})x$，$y=-x$ のなす角 $\theta$ を求めよ．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 23 講　三角関数(2)

(1)　$y=\sin\frac{2}{3}\theta$ の周期は $\boxed{ア}\pi$ である．また $y=\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\cos 2\theta$ のグラフを $\theta$ 軸方向に $\frac{\pi}{\boxed{イ}}$ 平行移動したものである．

(2)　$\frac{7}{12}\pi=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ であることより，$\sin\frac{7}{12}\pi=\frac{\sqrt{\boxed{ウ}}+\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$

$\cos\frac{7}{12}\pi=\frac{\sqrt{\boxed{カ}}-\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ である．

ただし，$\boxed{ウ}<\boxed{エ}$ とする．

(3)　$y=(2+\sqrt{3})x$，$y=x$ のなす鋭角 $\theta$ は $\theta=\frac{\pi}{\boxed{ケ}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 24 講　三角関数(3)

**例題 24 ― 1**

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$，$\sin\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 24 ー 1**

$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$，$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ のとき，$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 24 ー 2**

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，$\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\tan\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 24 ー 2**

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\tan\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題24－3**

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ．ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha\leqq\pi$ とする．

(1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $\sin\theta-\cos\theta$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 24 ー 3**

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ．ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha\leqq\pi$　とする．

(1)　$\sin\theta+\cos\theta$　　(2)　$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 24 ー 4**

次の関数の最大値と最小値を求めよ.

(1)　$y=\sin\theta\quad\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi\right)$　　(2)　$y=2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$

(3)　$y=\cos 2\theta-2\cos\theta+1\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 24 － 4**

次の関数の最大値と最小値を求めよ.

(1)　$y=\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta\quad\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2)　$y=\cos 2\theta-2\cos\theta+4\quad\left(\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{7}{6}\pi\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 24 講　三角関数(3)

(1)　$0<\theta<\pi$，$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\sin 2\theta=\dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$\cos 2\theta=-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}$ である．

(2)　関数 $y=\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{6}\cos\theta$（$0\leqq\theta\leqq\pi$）の最大値は $\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$，最小値は $\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ である．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第１講　展開

**例題１－１**

次の式を展開せよ．

(1)　$(x-y-2z)(x-y+z)$

(2)　$(a+b+c)^2$

(1)　$(x-y-2z)(x-y+z)=\{(x-y)-2z\}\{(x-y)+z\}$

$=(x-y)^2-(x-y)z-2z^2$

$=x^2-2xy+y^2-xz+yz-2z^2$

$=\boldsymbol{x^2+y^2-2z^2-2xy+yz-zx}$

(2)　$(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=\boldsymbol{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

**類題１－１**

次の式を展開せよ．

(1)　$(a+b-c-d)(a-b-c+d)$

(2)　$(a+b-2c)^2$

(1)　$(a+b-c-d)(a-b-c+d)=\{(a-c)+(b-d)\}\{(a-c)-(b-d)\}$

$=(a-c)^2-(b-d)^2$

$=a^2-2ac+c^2-(b^2-2bd+d^2)$

$=a^2-2ac+c^2-b^2+2bd-d^2$

$=\boldsymbol{a^2-b^2+c^2-d^2-2ac+2bd}$

(2)　$(a+b-2c)^2=a^2+b^2+(-2c)^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot(-2c)+2\cdot(-2c)\cdot a$

$=\boldsymbol{a^2+b^2+4c^2+2ab-4bc-4ca}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題1－2**

次の式を展開せよ.

(1)　$(x+1)(x-1)(x+2)(x+4)$

(2)　$(a+b)^2(a-b)^2$

(1)　$$\begin{aligned}(x+1)(x-1)(x+2)(x+4)&=\{(x+1)(x+2)\}\{(x-1)(x+4)\}\\&=(x^2+3x+2)(x^2+3x-4)\\&=(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8\\&=x^4+6x^3+9x^2-2x^2-6x-8\\&=\boldsymbol{x^4+6x^3+7x^2-6x-8}\end{aligned}$$

(2)　$$\begin{aligned}(a+b)^2(a-b)^2=\{(a+b)(a-b)\}^2&=(a^2-b^2)^2\\&=\boldsymbol{a^4-2a^2b^2+b^4}\end{aligned}$$

**類題1－2**

次の式を展開せよ.

(1)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

(2)　$(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2)^2$

(1)　$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)&=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}\\&=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)\\&=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24\\&=x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24\\&=\boldsymbol{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}\end{aligned}$$

(2)　$$\begin{aligned}(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2)^2&=\{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)\}^2\\&=\{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}^2\\&=(a^4-b^4)^2\\&=\boldsymbol{a^8-2a^4b^4+b^8}\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題1－3**
次の式を展開せよ.
(1)　$(x+2)^3$
(2)　$(2x-y)^3$

(1)　$(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3=\boldsymbol{x^3+6x^2+12x+8}$

(2)　$(2x-y)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot 2x\cdot y^2-y^3=\boldsymbol{8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3}$

**類題1－3**
次の式を展開せよ.
(1)　$(2x+3)^3$
(2)　$(3x-4y)^3$

(1)　$(2x+3)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 3+3\cdot 2x\cdot 3^2+3^3=\boldsymbol{8x^3+36x^2+54x+27}$

(2)　$(3x-4y)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 4y+3\cdot 3x\cdot(4y)^2-(4y)^3=\boldsymbol{27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3}$

**例題1－4**
次の式を展開せよ.
(1)　$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
(2)　$(x-2)(x^2+2x+4)$

(1)　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=\boldsymbol{a^3+b^3}$

(2)　$(x-2)(x^2+2x+4)=(x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2)=x^3-2^3=\boldsymbol{x^3-8}$

**類題1－4**
次の式を展開せよ.
(1)　$(x+3)(x^2-3x+9)$
(2)　$(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

(1)　$(x+3)(x^2-3x+9)=(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2)=x^3+3^3=\boldsymbol{x^3+27}$

(2)　$(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)=(2a-b)\{(2a)^2+2a\cdot b+b^2\}=(2a)^3-b^3=\boldsymbol{8a^3-b^3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第2講　因数分解

**例題2－1**
次の式を因数分解せよ．
(1)　$3x^2-5x+2$
(2)　$2x^2+xy-6y^2$

(1)　$3x^2-5x+2=\boldsymbol{(3x-2)(x-1)}$

(2)　$2x^2+xy-6y^2=\boldsymbol{(2x-3y)(x+2y)}$

**類題2－1**
次の式を因数分解せよ．
(1)　$2x^2-9x+4$
(2)　$6a^2-ab-12b^2$

(1)　$2x^2-9x+4=\boldsymbol{(2x-1)(x-4)}$

(2)　$6a^2-ab-12b^2=\boldsymbol{(3a+4b)(2a-3b)}$

**例題2－2**
次の式を因数分解せよ．
(1)　$x^3+125$
(2)　$8a^3-27b^3$

(1)　$x^3+125=x^3+5^3=(x+5)(x^2-x\cdot5+5^2)=\boldsymbol{(x+5)(x^2-5x+25)}$

(2)　$8a^3-27b^3=(2a)^3-(3b)^3=\boldsymbol{(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)}$

**類題2－2**
次の式を因数分解せよ．
(1)　$a^3+27$
(2)　$125x^3-8y^3$

(1)　$a^3+27=\boldsymbol{(a+3)(a^2-3a+9)}$

(2)　$125x^3-8y^3=\boldsymbol{(5x-2y)(25x^2+10xy+4y^2)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題２－３**
次の式を因数分解せよ.
(1)　$x^4+x^2-2$
(2)　$x^4-10x^2+9$

(1)　$x^4+x^2-2=(x^2)^2+x^2-2$
$=(x^2+2)(x^2-1)$
$=\boldsymbol{(x^2+2)(x+1)(x-1)}$

(2)　$x^4-10x^2+9=(x^2)^2-10x^2+9$
$=(x^2-9)(x^2-1)$
$=\boldsymbol{(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)}$

**類題２－３**
次の式を因数分解せよ.
(1)　$x^4-16$
(2)　$x^6-1$

(1)　$x^4-16=(x^2)^2-16=(x^2-4)(x^2+4)$
$=\boldsymbol{(x+2)(x-2)(x^2+4)}$

(2)　$x^6-1=(x^3)^2-1$
$=(x^3-1)(x^3+1)$
$=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$
$=\boldsymbol{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題２－４**
次の式を因数分解せよ.
(1)　$x^2-8y+2xy-16$
(2)　$x^2-2xy+y^2-x+y-2$

(1)　$x^2-8y+2xy-16=(2x-8)y+x^2-16$
$=2(x-4)y+(x+4)(x-4)$
$=(x-4)\{2y+(x+4)\}$
$=\boldsymbol{(x-4)(x+2y+4)}$

(2)　$x^2-2xy+y^2-x+y-2=x^2+(-2y-1)x+y^2+y-2$
$=x^2+(-2y-1)x+(y+2)(y-1)$
$=\boldsymbol{(x-y-2)(x-y+1)}$

**類題２－４**
次の式を因数分解せよ.
(1)　$x^2+xy+2x+y+1$
(2)　$x^2+8x-y^2+2y+15$

(1)　$x^2+xy+2x+y+1=(x+1)y+x^2+2x+1$
$=(x+1)y+(x+1)^2$
$=(x+1)\{y+(x+1)\}$
$=\boldsymbol{(x+1)(x+y+1)}$

(2)　$x^2+8x-y^2+2y+15=x^2+8x-(y^2-2y-15)$
$=x^2+8x-(y-5)(y+3)$
$=\boldsymbol{(x-y+5)(x+y+3)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第３講　実数・絶対値・１次不等式

**例題３－１**
次の値を求めよ.
(1)　$|5|$　(2)　$|-3|$　(3)　$|\sqrt{3}-2|$　(4)　$\sqrt{(-4)^2}$

(1)　$|5|=\mathbf{5}$

(2)　$|-3|=-(-3)=\mathbf{3}$

(3)　$\sqrt{3}=1.732\cdots<2$ より　$\sqrt{3}-2<0$　よって　$|\sqrt{3}-2|=-(\sqrt{3}-2)=\boldsymbol{-\sqrt{3}+2}$

(4)　$\sqrt{(-4)^2}=|-4|=-(-4)=\mathbf{4}$

**類題３－１**
次の値を求めよ.
(1)　$|\pi-4|$　(2)　$x\geqq 3$ のとき　$|x-3|$　(3)　$a<2$ のとき　$\sqrt{(a-2)^2}$

(1)　$\pi=3.14\cdots<4$　より　$\pi-4<0$　よって　$|\pi-4|=-(\pi-4)=\boldsymbol{-\pi+4}$

(2)　$x\geqq 3$ のとき　$x-3\geqq 0$　よって　$|x-3|=\boldsymbol{x-3}$

(3)　$a<2$ のとき　$a-2<0$　よって　$\sqrt{(a-2)^2}=|a-2|=-(a-2)=\boldsymbol{-a+2}$

**例題３－２**
(1)　次の式の分母を有理化せよ.
(ア)　$\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$　(イ)　$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ の整数部分を $a$，小数部分を $b$ とするとき，$a$，$b$ の値を求めよ.

(1)(ア)　$$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6-2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

(イ)　$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}$$
$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$$

(2)　$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-1}=2+\sqrt{2}$$

$1<\sqrt{2}<2$　より　$\sqrt{2}$ の整数部分は１

よって　$2+\sqrt{2}$ の整数部分は　$a=\mathbf{3}$

小数部分は　$b=(2+\sqrt{2})-a=2+\sqrt{2}-3=\boldsymbol{-1+\sqrt{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題３－２**

(1)　次の式の分母を有理化せよ．

(ア)　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$　　(イ)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

(2)　$\dfrac{7}{3+\sqrt{2}}$ の整数部分を $a$，小数部分を $b$ とするとき，$a$，$b$ の値を求めよ．

(1)(ア)　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\dfrac{4-4\sqrt{3}+3}{4-3}=\mathbf{7-4\sqrt{3}}$

(イ)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2\times 6}=\mathbf{\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}}$

(2)　$\dfrac{7}{3+\sqrt{2}}=\dfrac{7(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\dfrac{7(3-\sqrt{2})}{9-2}=3-\sqrt{2}$

$1<\sqrt{2}<2$　より　$3-\sqrt{2}$ の整数部分は　$a=\mathbf{1}$

小数部分は　$b=(3-\sqrt{2})-1=\mathbf{2-\sqrt{2}}$

**例題３－３**

(1)　次の不等式・連立不等式を解け．

(ア)　$3(2x-1)<8x-1$　　(イ)　$\begin{cases} 4x+5>25-x \\ \dfrac{3x-1}{2}\leqq\dfrac{2(x+5)}{3}+2 \end{cases}$

(ウ)　$-2x+1<3x+4<2(3x-4)$

(2)　$\dfrac{6x+1}{6}\geqq\dfrac{5}{3}x-\dfrac{5}{2}$ を満たす自然数 $x$ を求めよ．

(1)(ア)　$3(2x-1)<8x-1$

$6x-3<8x-1$

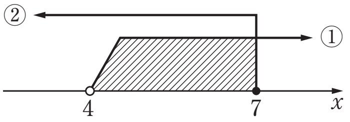
$-2x<2$　　よって　$\boldsymbol{x>-1}$

(イ)　$\begin{cases} 4x+5>25-x & \cdots\cdots① \\ \dfrac{3x-1}{2}\leqq\dfrac{2(x+5)}{3}+2 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より　$5x>20$　　$x>4$

②より　$3(3x-1)\leqq 4(x+5)+12$

$9x-3\leqq 4x+20+12$　　$5x\leqq 35$　　$x\leqq 7$




①，②の共通部分を求めて　$\boldsymbol{4<x\leqq 7}$

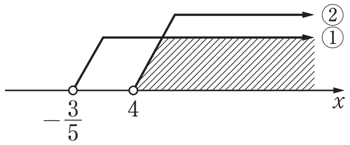
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(ウ) $\begin{cases} -2x+1<3x+4 & \cdots\cdots① \\ 3x+4<2(3x-4) & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より　$-5x<3$　　$x>-\dfrac{3}{5}$

②より　$3x+4<6x-8$　　$-3x<-12$　　$x>4$

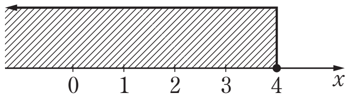
①，②の共通部分を求めて **$x>4$**




(2)　$\dfrac{6x+1}{6} \geqq \dfrac{5}{3}x-\dfrac{5}{2}$　より

$6x+1 \geqq 10x-15$　　$-4x \geqq -16$　　$x \leqq 4$

これを満たす自然数 $x$ は　**$x=1, 2, 3, 4$**




---

**類題３－３**

(1)　次の不等式・連立不等式を解け．

(ア) $\begin{cases} 5x+2 \geqq 4x-1 \\ 5x-3>8x+5 \end{cases}$　　(イ)　$8(x+2)<5x+1 \leqq 3(x-4)$

(2)　不等式 $\dfrac{x+8}{2}<\dfrac{4}{3}x+1$ を満たす最小の整数 $x$ を求めよ．

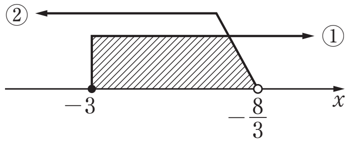
---

(1)(ア) $\begin{cases} 5x+2 \geqq 4x-1 & \cdots\cdots① \\ 5x-3>8x+5 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より　$x \geqq -3$

②より　$-3x>8$　　$x<-\dfrac{8}{3}$

①，②の共通部分をとって **$-3 \leqq x<-\dfrac{8}{3}$**

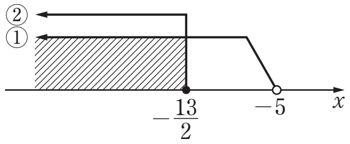



(イ) $\begin{cases} 8(x+2)<5x+1 & \cdots\cdots① \\ 5x+1 \leqq 3(x-4) & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より　$8x+16<5x+1$　　$3x<-15$　　$x<-5$

②より　$5x+1 \leqq 3x-12$　　$2x \leqq -13$　　$x \leqq -\dfrac{13}{2}$

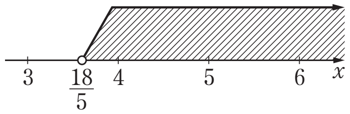
①，②の共通部分をとって　**$x \leqq -\dfrac{13}{2}$**




(2)　$\dfrac{x+8}{2}<\dfrac{4}{3}x+1$　より　$3(x+8)<8x+6$

$3x+24<8x+6$　　$-5x<-18$　　$x>\dfrac{18}{5}=3.6$

これを満たす最小の整数 $x$ は　**$x=4$**




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題３－４**
次の方程式・不等式を解け.
(1)　$|x-2|=3$　　(2)　$|2x-1|<5$　　(3)　$|3x+2|\geqq 4$
(4)　$|x+4|=5x$

(1)　$|x-2|=3$　より　$x-2=\pm 3$
　$x-2=3$　より　$x=5$　　$x-2=-3$　より　$x=-1$　　よって　$\boldsymbol{x=5,\ -1}$
(2)　$|2x-1|<5$　より　$-5<2x-1<5$　　$-4<2x<6$　　よって　$\boldsymbol{-2<x<3}$
(3)　$|3x+2|\geqq 4$　より　$3x+2\leqq -4,\ 4\leqq 3x+2$　　$3x\leqq -6,\ 2\leqq 3x$
よって　$\boldsymbol{x\leqq -2,\ \frac{2}{3}\leqq x}$
(4)　$|x+4|=5x$
　$x\geqq -4$ のとき　$x+4=5x$　　$x=1$　　これは　$x\geqq -4$ を満たす.
　$x<-4$ のとき　$-x-4=5x$　　$x=-\frac{2}{3}$　　これは　$x<-4$ を満たさず不適.
したがって求める解は　$\boldsymbol{x=1}$

**類題３－４**
次の方程式・不等式を解け.
(1)　$|x+5|=2$　　(2)　$|3x+2|\leqq 3$　　(3)　$|x-1|\geqq 2$
(4)　$|x-3|=-2x$

(1)　$|x+5|=2$　より　$x+5=\pm 2$
つまり　$x+5=2,\ x+5=-2$　より　$\boldsymbol{x=-3,\ -7}$
(2)　$|3x+2|\leqq 3$　より　$-3\leqq 3x+2\leqq 3$　　$-5\leqq 3x\leqq 1$　　よって　$\boldsymbol{-\frac{5}{3}\leqq x\leqq \frac{1}{3}}$
(3)　$|x-1|\geqq 2$　より　$x-1\leqq -2,\ 2\leqq x-1$　　よって　$\boldsymbol{x\leqq -1,\ 3\leqq x}$
(4)　$|x-3|=-2x$
　$x\geqq 3$ のとき　$x-3=-2x$　　$x=1$　　これは　$x\geqq 3$ を満たさず不適.
　$x<3$ のとき　$-x+3=-2x$　　$x=-3$　　これは　$x<3$ を満たす.
したがって求める解は　$\boldsymbol{x=-3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第4講　集合・命題と条件

**例題4－1**

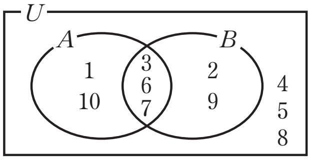
全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ の部分集合 $A$，$B$ を

$A=\{1,\ 3,\ 6,\ 7,\ 10\}$，$B=\{2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 9\}$

とする．このとき，次の集合を求めよ．

(1)　$A\cap B$　　(2)　$A\cup B$　　(3)　$\overline{A}$　　(4)　$A\cap\overline{B}$

右図より




(1)　$A\cap B=$ **{3, 6, 7}**

(2)　$A\cup B=$ **{1, 2, 3, 6, 7, 9, 10}**

(3)　$\overline{A}=$ **{2, 4, 5, 8, 9}**

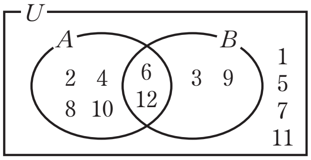
(4)　$A\cap\overline{B}=$ **{1, 10}**

**類題4－1**

1から12までの自然数全体の集合 $U$ を全体集合とし，その部分集合のうち2の倍数全体の集合を $A$，3の倍数全体の集合を $B$ とする．このとき，次の集合を求めよ．

(1)　$A\cap B$　　(2)　$A\cup B$　　(3)　$\overline{A}\cap B$　　(4)　$\overline{A}\cap\overline{B}$

右図より




(1)　$A\cap B=$ **{6, 12}**

(2)　$A\cup B=$ **{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12}**

(3)　$\overline{A}\cap B=$ **{3, 9}**

(4)　$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=$ **{1, 5, 7, 11}**

**例題4－2**

$x$，$y$ を実数とする．次の命題の真偽を調べよ．偽ならば反例を1つあげよ．

(1)　$x=1$　ならば　$x^2=1$　　(2)　$x^2=1$　ならば　$x=1$

(3)　$x+y>0$ かつ $xy>0$　ならば　$x>0$ かつ $y>0$

(4)　$x\geqq 1$　ならば　$x>1$

(1)　$x^2=1$　より　$x=1$　または　$x=-1$　　よって　$x=1$　ならば　$x^2=1$ は　**真**

(2)　$x^2=1$　より　$x=1$　または　$x=-1$　　よって　$x^2=1$　ならば　$x=1$ は　**偽**

**（反例　$x=-1$）**

(3)　$xy>0$ のとき　「$x>0$ かつ $y>0$」……①　または　「$x<0$ かつ $y<0$」……②

①，②のうち　$x+y>0$ を満たすのは①である．よって　**真**

(4)　$x\geqq 1$ を満たす実数 $x$ 全体の集合を $P$，$x>1$ を満たす実数 $x$ 全体の集合を $Q$ とすると $x=1$ は集合 $P$ に含まれるが集合 $Q$ には含まれない．よって　**偽（反例　$x=1$）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題４－２**

$x$，$y$ を実数とする．次の命題の真偽を調べよ．偽ならば反例を１つあげよ．

(1)　$xy=0$　ならば　$x=0$　である．

(2)　$-2<x<3$　ならば　$-2\leqq x<5$　である．

(3)　$x$ を整数とするとき，$x$ が 4 の倍数ならば，$x$ は 2 の倍数である．

(4)　$x^2=2x$　ならば　$x=2$

(1)　$xy=0$　より　$x=0$　または　$y=0$

　よって　$xy=0$　ならば　$x=0$ である　は　**偽（反例　$x=1$，$y=0$）**

(2)　$-2\leqq x<5$　は　$-2<x<3$　を含む．よって　**真**

(3)　整数 $x$ が 4 の倍数のとき　$x=4k$（$k$ は整数）と表せる．

　このとき　$x=4k=2\times 2k$　であり，$2k$ は整数より　$x$ は 2 の倍数である．

　したがって　$x$ が 4 の倍数ならば，$x$ は 2 の倍数である　は　**真**

(4)　$x^2=2x$　より　$x^2-2x=0$　　$x(x-2)=0$　　$x=0$，$2$

　よって　$x^2=2x$　ならば　$x=2$　は　**偽（反例　$x=0$）**

**例題４－３**

次の条件 $p$ は条件 $q$ であるための何条件であるか．最も適するものを(ア)～(エ)から選べ．ただし，$x$，$y$ は実数とする．

(1)　$p$：$x=3$　　$q$：$x^2-4x+3=0$

(2)　$p$：△ABC が直角三角形　　$q$：$\angle\mathrm{A}=90^\circ$

(3)　$p$：$xy=0$　　$q$：$x$，$y$ のうち少なくとも１つは 0

(4)　$p$：$x>0$　　$q$：$|x|>1$

(ア)　必要十分条件である　　(イ)　必要条件であるが十分条件ではない

(ウ)　十分条件であるが必要条件ではない　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

(1)　$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)=0$　よって　$x=1$，$3$

　よって　$p\Longrightarrow q$ は真　　$q\Longrightarrow p$ は偽（反例　$x=1$）

　したがって　$p$ は $q$ であるための十分条件であるが必要条件ではない　**(ウ)**

(2)　$p\Longrightarrow q$ は偽　　$q\Longrightarrow p$ は真（反例　$\angle\mathrm{A}=30^\circ$，$\angle\mathrm{B}=90^\circ$，$\angle\mathrm{C}=60^\circ$）

　したがって　$p$ は $q$ であるための必要条件であるが十分条件ではない　**(イ)**

(3)　$xy=0$ より　$x=0$　または　$y=0$

　よって $p$ と $q$ は同値である．したがって　$p$ は $q$ であるための必要十分条件である　**(ア)**

(4)　$p\Longrightarrow q$ は偽　$\left(\text{反例}\quad x=\dfrac{1}{2}\right)$　　$q\Longrightarrow p$ は偽　$\left(\text{反例}\quad x=-\dfrac{3}{2}\right)$

　したがって　$p$ は $q$ であるための必要条件でも十分条件でもない．　**(エ)**

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題４－３**

次の条件 $p$ は条件 $q$ であるための何条件であるか．最も適するものを㋐〜㋓から選べ．ただし，$x$，$y$ は実数とする．

(1)　$p$：$x \neq 0$　　$q$：$x^2-3x+2=0$

(2)　$p$：四角形 ABCD が正方形　　$q$：四角形 ABCD が長方形

(3)　$p$：$x=1$　　$q$：$xy=1$

(4)　$p$：$x$ が 4 の倍数　かつ　6 の倍数　　$q$：$x$ が 24 の倍数

㋐　必要十分条件である　　㋑　必要条件であるが十分条件ではない

㋒　十分条件であるが必要条件ではない　　㋓　必要条件でも十分条件でもない

(1)　$x \neq 0$ は $x=0$ 以外のすべての実数

$x^2-3x+2=0$　より　$x=1$ または $x=2$

よって $p \Longrightarrow q$ は偽（反例　$x=3$）　　$q \Longrightarrow p$ は真　　**㋑**

(2)　$p \Longrightarrow q$ は明らかに真

$q \Longrightarrow p$ は偽（反例　AB＝CD＝1　かつ　BC＝DA＝2）　**㋒**

(3)　$p \Longrightarrow q$ は偽（反例　$x=1$，$y=2$）　　$q \Longrightarrow p$ は偽 $\left(\text{反例}\quad x=\frac{1}{2},\ y=2\right)$　**㋓**

(4)　$x$ が 4 の倍数　かつ　6 の倍数のとき，$x$ は 12 の倍数

$p \Longrightarrow q$ は偽（反例　$x=12$）　　$q \Longrightarrow p$ は真　　**㋑**

**例題４－４**

(1)　次の条件の否定を求めよ．ただし $x$，$y$ は実数とする．

㋐　$x=1$　　㋑　$1<x \leqq 2$

㋒　$x>0$　かつ　$y \leqq 2$　　㋓　$x$ は正　または　$y$ は 3 の倍数

(2)　命題「$x+y \neq 4 \Longrightarrow x \neq 1$ または $y \neq 3$」の逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ．

(1)　㋐　「$x=1$」の否定は **「$x \neq 1$」**

㋑　「$1<x \leqq 2$」の否定は **「$x \leqq 1$ または $2<x$」**　（「$x \leqq 1$，$2<x$」）

㋒　「$x>0$　かつ　$y \leqq 2$」の否定は **「$x \leqq 0$　または　$y>2$」**

㋓　「$x$ は正　または　$y$ は 3 の倍数」の否定は

**「$x$ は 0 以下　かつ　$y$ は 3 の倍数でない」**

(2)　命題「$x+y \neq 4 \Longrightarrow x \neq 1$ または $y \neq 3$」について

**逆：「$x \neq 1$ または $y \neq 3 \Longrightarrow x+y \neq 4$」　偽（反例　$x=2$ かつ $y=2$）**

**裏：「$x+y=4 \Longrightarrow x=1$ かつ $y=3$」　偽（反例　$x=2$ かつ $y=2$）**

**対偶：「$x=1$ かつ $y=3 \Longrightarrow x+y=4$」　は明らかに真**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題４－４**

(1)　命題「$x=1 \Longrightarrow x^2=1$」の逆，裏，対偶を述べよ．

(2)　$x$ は実数．$n$ は自然数とする．次の命題の対偶を述べ，その真偽を調べよ．

(ア)　$x^2 \geqq 4 \Longrightarrow x \geqq 2$

(イ)　$x+y=2 \Longrightarrow x \leqq 1$　または　$y \leqq 1$

(ウ)　$n$ は 4 の倍数でない $\Longrightarrow$ $n$ は 2 の倍数でない

(1)　命題「$x=1 \Longrightarrow x^2=1$」について

**逆：「$\boldsymbol{x^2=1 \Longrightarrow x=1}$」**

**裏：「$\boldsymbol{x \neq 1 \Longrightarrow x^2 \neq 1}$」**

**対偶：「$\boldsymbol{x^2 \neq 1 \Longrightarrow x \neq 1}$」**

(2)(ア)　「$x^2 \geqq 4 \Longrightarrow x \geqq 2$」

この対偶は「$x<2 \Longrightarrow x^2<4$」　これは**偽**（反例　$x=-3$）

(イ)　「$x+y=2 \Longrightarrow x \leqq 1$　または　$y \leqq 1$」

この対偶は「$x>1$　かつ　$y>1 \Longrightarrow x+y \neq 2$」　これは**真**

(ウ)　「$n$ は 4 の倍数でない $\Longrightarrow$ $n$ は 2 の倍数でない」

この対偶は「$n$ は 2 の倍数 $\Longrightarrow$ $n$ は 4 の倍数」　これは**偽**（反例　$n=2$）

ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

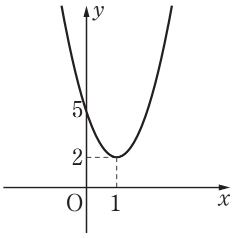
# 第５講　２次関数(1)

**例題５－１**

次の２次関数のグラフをかけ．また，その頂点の座標と軸の方程式を求めよ．

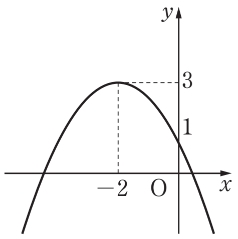
(1)　$y=3(x-1)^2+2$　　(2)　$y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$

(1)




頂点 $(1,\ 2)$　　軸　$x=1$

(2)




頂点 $(-2,\ 3)$　　軸　$x=-2$

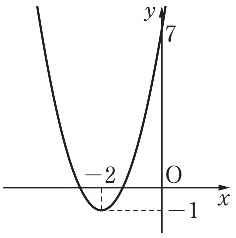
**類題５－１**

次の２次関数のグラフをかけ．また，その頂点の座標と軸の方程式を求めよ．

(1)　$y=2(x+2)^2-1$　　(2)　$y=-(x-1)^2-1$

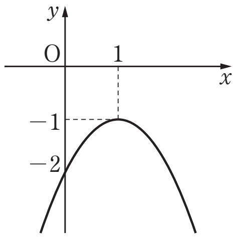
(3)　$y=x^2-1$　　(4)　$y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$

(1)



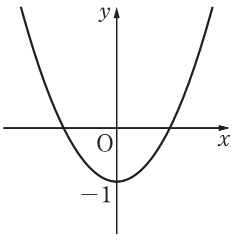

頂点 $(-2,\ -1)$　　軸　$x=-2$

(2)



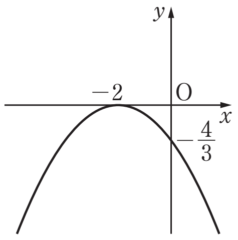

頂点 $(1,\ -1)$　　軸　$x=1$

(3)




頂点 $(0,\ -1)$　　軸　$x=0$

(4)




頂点 $(-2,\ 0)$　　軸　$x=-2$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題５－２**

次の２次関数の頂点の座標と軸の方程式を求めよ.

(1)　$y=x^2+4x+2$　　(2)　$y=-2x^2+2x+1$

(1)　$y=x^2+4x+2=(x+2)^2-4+2=(x+2)^2-2$　　**頂点 $(-2,\ -2)$　　軸　$x=-2$**

(2)　$y=-2x^2+2x+1=-2(x^2-x)+1$

$$=-2\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+1$$

$$=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

**頂点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$　　軸　$x=\frac{1}{2}$**

**類題５－２**

次の２次関数の頂点の座標と軸の方程式を求めよ.

(1)　$y=x^2+x+1$　　(2)　$y=-3x^2+6x-3$

(3)　$y=2x^2+3x+4$　　(4)　$y=-\frac{1}{3}x^2-x-6$

(1)　$y=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$　**頂点 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$　　軸　$x=-\frac{1}{2}$**

(2)　$y=-3x^2+6x-3=-3(x^2-2x)-3$

$$=-3\{(x-1)^2-1\}-3$$

$$=-3(x-1)^2+3-3=-3(x-1)^2$$　**頂点 $(1,\ 0)$　　軸　$x=1$**

(3)　$y=2x^2+3x+4=2\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)+4$

$$=2\left\{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right\}+4$$

$$=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}+4=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$$

**頂点 $\left(-\frac{3}{4},\ \frac{23}{8}\right)$　　軸　$x=-\frac{3}{4}$**

(4)　$y=-\frac{1}{3}x^2-x-6=-\frac{1}{3}(x^2+3x)-6$

$$=-\frac{1}{3}\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}-6$$

$$=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}-6=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{21}{4}$$

**頂点 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{21}{4}\right)$　　軸　$x=-\frac{3}{2}$**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題５－３**

(1)　2 次関数 $f(x)=x^2-x+1$ について，$f(1)$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(a+1)$ の値を求めよ．

(2)　次の 2 次関数に最大値，最小値があればそれを求めよ．

(ア)　$y=3x^2+2$　　　　(イ)　$f(x)=-x^2+2x+2$

(1)　$f(x)=x^2-x+1$ について

$f(1)=1^2-1+1=\mathbf{1}$　　　$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+1=\boldsymbol{\dfrac{7}{4}}$

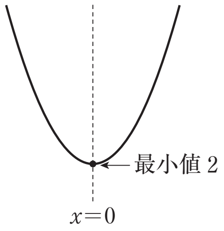
$f(a+1)=(a+1)^2-(a+1)+1=a^2+2a+1-a-1+1=\boldsymbol{a^2+a+1}$

(2)(ア)　$y=3x^2+2$

グラフは下に凸　　頂点の座標は $(0,\ 2)$

よって　**最大値はない**

**最小値は**　$x=0$ のとき　$\mathbf{2}$

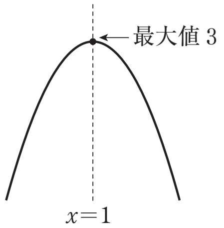



(イ)　$f(x)=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$

グラフは上に凸　　頂点の座標は $(1,\ 3)$

よって　**最大値は**　$\boldsymbol{f(1)=3}$

**最小値はない**




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 5 − 3**

(1)　2 次関数 $f(x)=2x^2-3x+1$ について，$f(0)$，$f(-2)$，$f(a-2)$ の値を求めよ．

(2)　次の 2 次関数に最大値，最小値があればそれを求めよ．

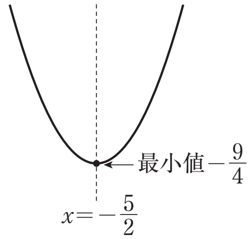
(ア)　$y=x^2+5x+4$　　　　(イ)　$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+4$

(1)　$f(x)=2x^2-3x+1$ について

$f(0)=2\cdot0^2-3\cdot0+1=\mathbf{1}$　　　$f(-2)=2(-2)^2-3(-2)+1=8+6+1=\mathbf{15}$

$f(a-2)=2(a-2)^2-3(a-2)+1=\mathbf{2a^2-11a+15}$

(2)(ア)　$y=x^2+5x+4=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

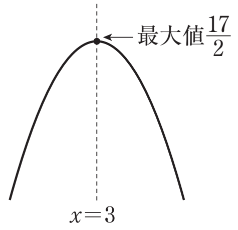



グラフは下に凸　　頂点の座標は $\left(-\frac{5}{2},\ -\frac{9}{4}\right)$

よって　**最大値はない**

**最小値は**　$x=-\frac{5}{2}$ のとき　$\mathbf{-\frac{9}{4}}$

(イ)　$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+4=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{17}{2}$




グラフは上に凸　　頂点の座標は $\left(3,\ \frac{17}{2}\right)$

よって　**最大値は** $\mathbf{f(3)=\frac{17}{2}}$

**最小値はない**

**例題 5 − 4**

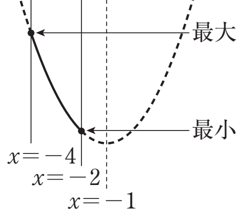
関数 $f(x)=x^2+2x-1$ について，次の定義域における最大値，最小値を求めよ．

(1)　$-4\leqq x\leqq -2$　　(2)　$-3\leqq x\leqq 0$　　(3)　$-2\leqq x\leqq 1$　　(4)　$0\leqq x\leqq 3$

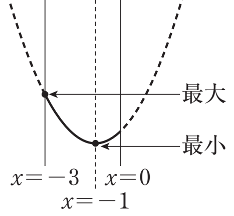
$f(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$　　軸　$x=-1$

(1)〜(4)におけるグラフは以下．

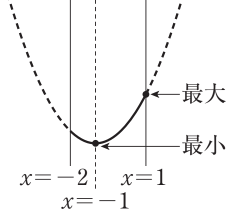
(1)



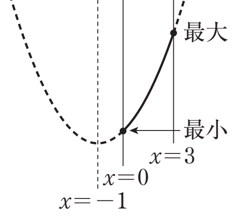

(2)




(3)




(4)




(1)　最大値　$f(-4)=\mathbf{7}$　　　最小値　$f(-2)=\mathbf{-1}$

(2)　最大値　$f(-3)=\mathbf{2}$　　　最小値　$f(-1)=\mathbf{-2}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　最大値　$f(1)=\mathbf{2}$　　最小値　$f(-1)=\mathbf{-2}$

(4)　最大値　$f(3)=\mathbf{14}$　　最小値　$f(0)=\mathbf{-1}$

**類題5－4**

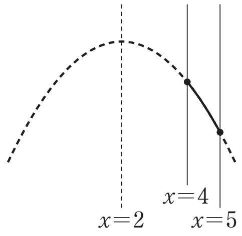
関数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}$ について，次の定義域における最大値，最小値を求めよ．

(1)　$4\leqq x\leqq 5$　　(2)　$1\leqq x\leqq 4$　　(3)　$0\leqq x\leqq 3$　　(4)　$-1\leqq x\leqq 0$

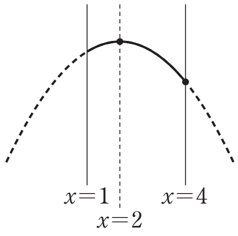
$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{7}{2}$　　軸　$x=2$

(1)～(4)におけるグラフは以下．

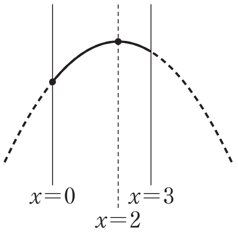
(1)



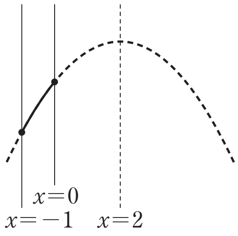

(2)




(3)




(4)




(1)　最大値　$f(4)=\mathbf{\frac{3}{2}}$　　最小値　$f(5)=\mathbf{-1}$

(2)　最大値　$f(2)=\mathbf{\frac{7}{2}}$　　最小値　$f(4)=\mathbf{\frac{3}{2}}$

(3)　最大値　$f(2)=\mathbf{\frac{7}{2}}$　　最小値　$f(0)=\mathbf{\frac{3}{2}}$

(4)　最大値　$f(0)=\mathbf{\frac{3}{2}}$　　最小値　$f(-1)=\mathbf{-1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

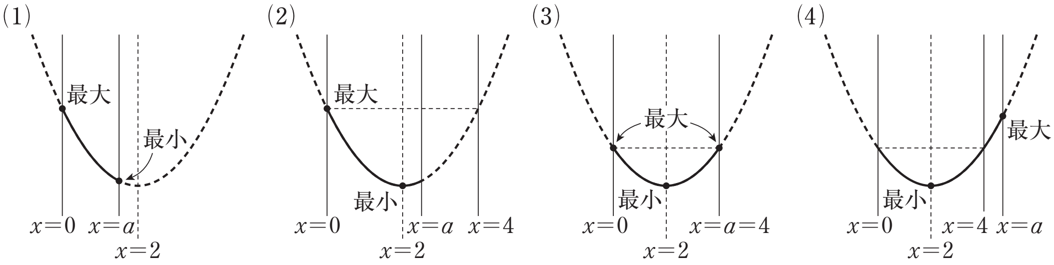
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第６講　２次関数(2)

**例題６－１**
定義域が $0 \leqq x \leqq a$ である関数 $y=x^2-4x$ の最大値および最小値を，次の各場合について求めよ．
(1)　$0 \leqq a < 2$　　(2)　$2 \leqq a < 4$　　(3)　$a=4$　　(4)　$4 < a$

$y=x^2-4x=(x-2)^2-4$　　軸　$x=2$

(1)～(4)のときのグラフは次の通り




(1)　$0 \leqq a < 2$ のとき

　　**$x=0$ で最大値 0　　$x=a$ で最小値 $a^2-4a$**

(2)　$2 \leqq a < 4$ のとき

　　**$x=0$ で最大値 0　　$x=2$ で最小値 $-4$**

(3)　$a=4$ のとき

　　**$x=0$，4 で最大値 0　　$x=2$ で最小値 $-4$**

(4)　$4 < a$ のとき

　　**$x=a$ で最大値 $a^2-4a$　　$x=2$ で最小値 $-4$**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

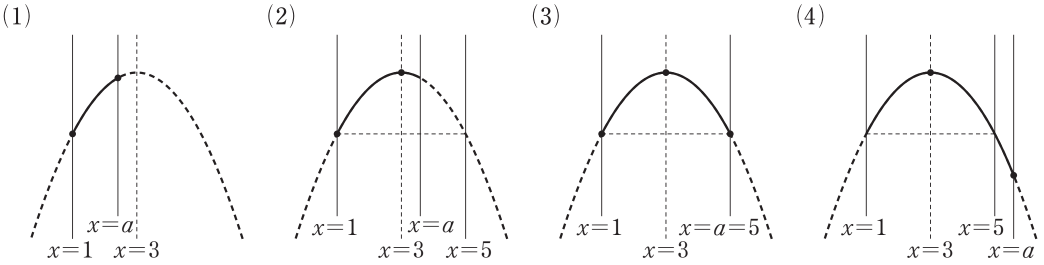
**類題６－１**

定義域が $1 \leqq x \leqq a$ である関数 $f(x)=-x^2+6x+5$ の最大値および最小値を，次の各場合について求めよ．

(1)　$1 \leqq a<3$　　(2)　$3 \leqq a<5$　　(3)　$a=5$　　(4)　$5<a$

$f(x)=-x^2+6x+5=-(x-3)^2+14$　　軸　$x=3$

(1)～(4)のときのグラフは次の通り




(1)　$1 \leqq a<3$ のとき

　　最大値　$f(a)=\boldsymbol{-a^2+6a+5}$　　最小値　$f(1)=\boldsymbol{10}$

(2)　$3 \leqq a<5$ のとき

　　最大値　$f(3)=\boldsymbol{14}$　　最小値　$f(1)=\boldsymbol{10}$

(3)　$a=5$ のとき

　　最大値　$f(3)=\boldsymbol{14}$　　最小値　$f(1)=f(5)=\boldsymbol{10}$

(4)　$5<a$ のとき

　　最大値　$f(3)=\boldsymbol{14}$　　最小値　$f(a)=\boldsymbol{-a^2+6a+5}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題6－2**

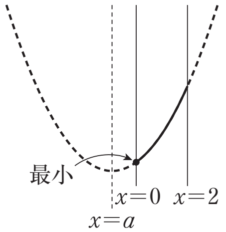
関数 $y=x^2-2ax+1$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最小値を，次の各場合について求めよ．

(1)　$a<0$　　(2)　$0 \leqq a \leqq 2$　　(3)　$2<a$

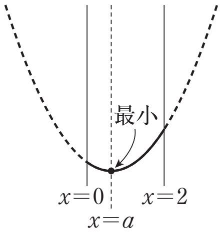
$y=x^2-2ax+1=(x-a)^2-a^2+1$　　軸　$x=a$

(1)〜(3)のときのグラフは次の通り

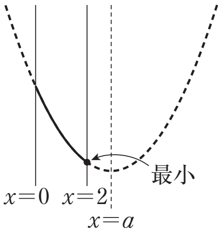
(1)




(2)




(3)




(1)　$a<0$ のとき　　最小値　**1**（$x=0$ のとき）

(2)　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　最小値　$\boldsymbol{-a^2+1}$（$x=a$ のとき）

(3)　$2<a$ のとき　　最小値　$\boldsymbol{-4a+5}$（$x=2$ のとき）

**類題6－2**

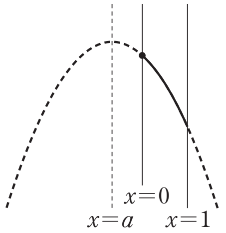
関数 $f(x)=-2x^2+4ax+4a+1$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を，次の各場合について求めよ．

(1)　$a<0$　　(2)　$0 \leqq a \leqq 1$　　(3)　$1<a$

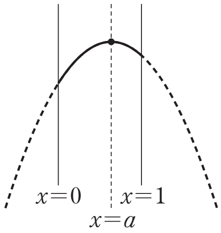
$f(x)=-2x^2+4ax+4a+1=-2(x-a)^2+2a^2+4a+1$　　軸　$x=a$

(1)〜(3)のときのグラフは次の通り

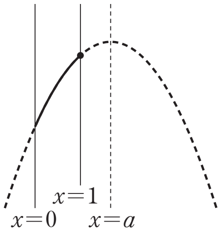
(1)




(2)




(3)




(1)　$a<0$ のとき　　最大値　$f(0)=\boldsymbol{4a+1}$

(2)　$0 \leqq a \leqq 1$ のとき　　最大値　$f(a)=\boldsymbol{2a^2+4a+1}$

(3)　$1<a$ のとき　　最大値　$f(1)=\boldsymbol{8a-1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題６－３**

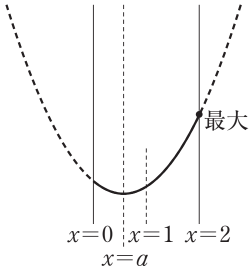
関数 $y=x^2-2ax+1$ の $0\leqq x\leqq 2$ における最大値を，次の各場合について求めよ．

(1)　$a<1$　　　(2)　$a=1$　　　(3)　$1<a$

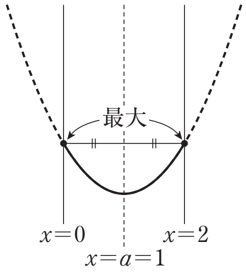
$y=x^2-2ax+1=(x-a)^2-a^2+1$　　軸　$x=a$

(1)〜(3)のときのグラフは次の通り

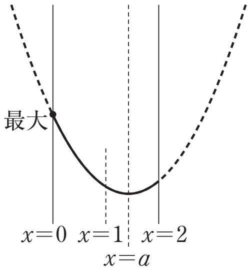
(1)




(2)




(3)




(1)　$a<1$ のとき　　最大値　$\boldsymbol{-4a+5}$（$x=2$ のとき）

(2)　$a=1$ のとき　　最大値　$\mathbf{1}$（$x=0$，2 のとき）

(3)　$1<a$ のとき　　最大値　$\mathbf{1}$（$x=0$ のとき）

**類題６－３**

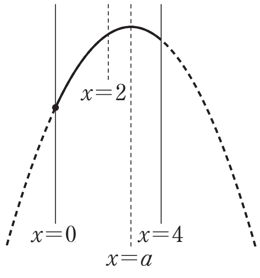
関数 $f(x)=-2x^2+4ax+4a+1$ の $0\leqq x\leqq 4$ における最小値を，次の各場合について求めよ．

(1)　$a>2$　　　(2)　$a=2$　　　(3)　$a<2$

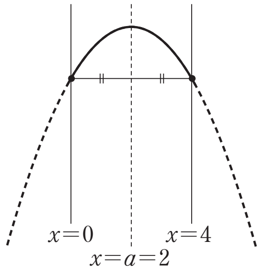
$f(x)=-2x^2+4ax+4a+1=-2(x-a)^2+2a^2+4a+1$　　軸　$x=a$

(1)〜(3)のときのグラフは次の通り

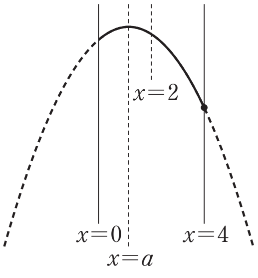
(1)




(2)




(3)




(1)　$a>2$ のとき　　最小値　$f(0)=\boldsymbol{4a+1}$

(2)　$a=2$ のとき　　最小値　$f(0)=f(4)=\mathbf{9}$

(3)　$a<2$ のとき　　最小値　$f(4)=\boldsymbol{20a-31}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題６－４**
次の条件を満たす２次関数の式を求めよ．
(1)　グラフの頂点が $(2,\ 1)$ で，点 $(1,\ 4)$ を通る．
(2)　放物線 $y=-2x^2$ を平行移動したもので，２点 $(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$ を通る．
(3)　グラフが３点　$(-1,\ -3)$，$(1,\ 5)$，$(2,\ 3)$ を通る．

(1)　頂点が $(2,\ 1)$ より，求める２次関数の式は $y=a(x-2)^2+1$　とおける．
このグラフが点 $(1,\ 4)$ を通るので　$4=a(1-2)^2+1$　$a=3$
よって　$\boldsymbol{y=3(x-2)^2+1}$　$(y=3x^2-12x+13)$
(2)　求める２次関数は放物線 $y=-2x^2$ を平行移動したものであるので
$y=-2x^2+bx+c$　とおける．
このグラフが２点 $(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$ を通るので
$1=-2+b+c$　かつ　$3=-8+2b+c$　つまり　$b+c=3$　かつ　$2b+c=11$
よって　$b=8,\ c=-5$　したがって　$\boldsymbol{y=-2x^2+8x-5}$
(3)　求める２次関数を　$y=ax^2+bx+c$　とおく．
このグラフが３点 $(-1,\ -3)$，$(1,\ 5)$，$(2,\ 3)$ を通るので
$-3=a-b+c$　……①　$5=a+b+c$　……②　$3=4a+2b+c$　……③
②－①より　$2b=8$　$b=4$
このとき①より　$a+c=1$　③より　$4a+c=-5$
これらより　$a=-2,\ c=3$
よって　$\boldsymbol{y=-2x^2+4x+3}$

**類題６－４**
次の条件を満たす２次関数の式を求めよ．
(1)　$x=-2$ のとき最大値５をとり，グラフが点 $(2,\ -11)$ を通る．
(2)　放物線 $y=2x^2$ を平行移動したもので，グラフの軸が $x=-\dfrac{5}{2}$ であり，$x=-1$ のとき $y=5$．
(3)　グラフが３点 $(1,\ -1)$，$(2,\ 6)$，$(-3,\ -9)$ を通る．

(1)　$x=-2$ のとき最大値５をとるので，求める２次関数の式は $y=a(x+2)^2+5$　$(a<0)$ とおける．
このグラフが $(2,\ -11)$ を通るので　$-11=a(2+2)^2+5$　$16a=-16$　$a=-1$
よって　$\boldsymbol{y=-(x+2)^2+5}$　$(y=-x^2-4x+1)$
(2)　求める２次関数は放物線 $y=2x^2$ を平行移動したものであり，グラフの軸が $x=-\dfrac{5}{2}$ より　$y=2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+q$　とおける．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$x=-1$ のとき $y=5$ より　$5=2\left(-1+\dfrac{5}{2}\right)^2+q$　　$q=\dfrac{1}{2}$

よって　$\boldsymbol{y=2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}$　$(y=2x^2+10x+13)$

(3)　求める 2 次関数を　$y=ax^2+bx+c$　とおく.

このグラフが 3 点 $(1,\ -1)$, $(2,\ 6)$, $(-3,\ -9)$ を通るので

$-1=a+b+c$　……①　　$6=4a+2b+c$　……②　　$-9=9a-3b+c$　……③

②－①より　$3a+b=7$

③－①より　$8a-4b=-8$　つまり　$2a-b=-2$

これらより　$a=1,\ b=4$　　このとき　$c=-6$

よって　$\boldsymbol{y=x^2+4x-6}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第7講　2次関数(3)

**例題7－1**

次の2次方程式の実数解の個数を調べよ．また，実数解をもつ場合はその実数解を答えよ．

(1)　$x^2+3x+1=0$

(2)　$9x^2-6x+1=0$

(3)　$3x^2-5x+3=0$

判別式を $D$ とする．

(1)　$D=3^2-4\cdot1\cdot1=9-4=5>0$

よって実数解の個数は **2 個**　　実数解は　$\boldsymbol{x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}}$

(2)　$D=(-6)^2-4\cdot9\cdot1=36-36=0$

よって実数解の個数は **1 個**　　実数解は　$\boldsymbol{x}=\dfrac{6}{18}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(3)　$D=(-5)^2-4\cdot3\cdot3=25-36=-11<0$

よって実数解の個数は **0 個**

**類題7－1**

次の2次方程式の実数解の個数を調べよ．また，実数解をもつ場合はその実数解を答えよ．

(1)　$x^2-4x+1=0$

(2)　$-x^2+x-4=0$

(3)　$4x^2-20x+25=0$

判別式を $D$ とする．

(1)　$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot1=16-4=12>0$

よって実数解の個数は **2 個**　　実数解は　$x=\dfrac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\dfrac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{2\pm\sqrt{3}}$

(2)　$-x^2+x-4=0$　より　$x^2-x+4=0$

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot4=1-16=-15<0$

よって実数解の個数は **0** 個

(3)　$D=(-20)^2-4\cdot4\cdot25=400-400=0$

よって実数解の個数は **1 個**　　実数解は　$x=\dfrac{20}{8}=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題７－２**

2 次関数 $y=x^2+4x+k$ のグラフと $x$ 軸との共有点の個数は，定数 $k$ の値によってどのように変わるか．

2 次関数 $y=x^2+4x+k$ と $x$ 軸との共有点の個数は，2 次方程式 $x^2+4x+k=0$ の実数解の個数である．

この方程式の判別式を $D$ とすると　$D=4^2-4k=16-4k$

$D>0$　つまり　$16-4k>0$　より　$\boldsymbol{k<4}$　**のとき　2 個**

$D=0$　つまり　$16-4k=0$　より　$\boldsymbol{k=4}$　**のとき　1 個**

$D<0$　つまり　$16-4k<0$　より　$\boldsymbol{k>4}$　**のとき　0 個**

**類題７－２**

2 次関数 $y=-x^2+2x+k+3$ のグラフと $x$ 軸との共有点の個数が次のようになるときの，$k$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(1)　2 個　　(2)　1 個　　(3)　0 個

2 次関数 $y=-x^2+2x+k+3$ と $x$ 軸との共有点の個数は，2 次方程式 $-x^2+2x+k+3=0$ つまり　$x^2-2x-k-3=0$ の実数解の個数である．

この方程式の判別式を $D$ とすると　$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-k-3)=4k+16$

(1)　2 個のときは　$D>0$　つまり　$4k+16>0$　より　$\boldsymbol{k>-4}$

(2)　1 個のときは　$D=0$　つまり　$4k+16=0$　より　$\boldsymbol{k=-4}$

(3)　0 個のときは　$D<0$　つまり　$4k+16<0$　より　$\boldsymbol{k<-4}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題7－3**

次の2次不等式を解け.

(1)　$x^2+x-2>0$　　(2)　$x^2-3x-2\geqq 0$

(3)　$3x^2-10x+3<0$　　(4)　$-x^2+x+1\geqq 0$

(1)　$x^2+x-2>0$　より　$(x+2)(x-1)>0$　よって　$\boldsymbol{x<-2,\ 1<x}$

(2)　$x^2-3x-2=0$　を解くと　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

よって　$x^2-3x-2\geqq 0$ の解は　$\boldsymbol{x\leqq\dfrac{3-\sqrt{17}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\leqq x}$

(3)　$3x^2-10x+3<0$　より　$(3x-1)(x-3)<0$　よって　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}<x<3}$

(4)　$-x^2+x+1\geqq 0$　より　$x^2-x-1\leqq 0$

$x^2-x-1=0$　を解くと　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

よって　$-x^2+x+1\geqq 0$ の解は　$\boldsymbol{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

**類題7－3**

次の2次不等式を解け.

(1)　$x^2-7x+10>0$　　(2)　$4x^2-5x-3<0$

(3)　$-x^2+4x+7\geqq 0$　　(4)　$x^2\geqq 8$

(1)　$x^2-7x+10>0$　より　$(x-2)(x-5)>0$　よって　$\boldsymbol{x<2,\ 5<x}$

(2)　$4x^2-5x-3=0$　を解くと　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{73}}{8}$

よって　$4x^2-5x-3<0$ の解は　$\boldsymbol{\dfrac{5-\sqrt{73}}{8}<x<\dfrac{5+\sqrt{73}}{8}}$

(3)　$-x^2+4x+7\geqq 0$　より　$x^2-4x-7\leqq 0$

$x^2-4x-7=0$　を解くと　$x=2\pm\sqrt{11}$

よって　$-x^2+4x+7\geqq 0$ の解は　$\boldsymbol{2-\sqrt{11}\leqq x\leqq 2+\sqrt{11}}$

(4)　$x^2\geqq 8$　より　$x^2-8\geqq 0$

$x^2-8=0$ を解くと　$x^2=8$　　$x=\pm 2\sqrt{2}$

よって　$x^2\geqq 8$ の解は　$\boldsymbol{x\leqq -2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\leqq x}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題７－４**

(1)　次の 2 次不等式を解け.

(ア)　$(x-2)^2>0$　　(イ)　$(x-2)^2 \geqq 0$

(ウ)　$(x-2)^2<0$　　(エ)　$(x-2)^2 \leqq 0$

(2)　次の 2 次不等式を解け.

(ア)　$x^2-2x+3<0$　　(イ)　$2x^2-5x+4 \geqq 0$

(1)(ア)　**2 以外のすべての実数**　　(イ)　**すべての実数**

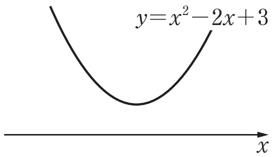
(ウ)　**解はない**　　(エ)　$\boldsymbol{x=2}$

(2)(ア)　2 次方程式 $x^2-2x+3=0$ の判別式を $D$ とすると

$$D=4-4\cdot1\cdot3=-8<0$$

よって　$y=x^2-2x+3$ のグラフは右図.

したがって　$x^2-2x+3<0$ の　**解はない**

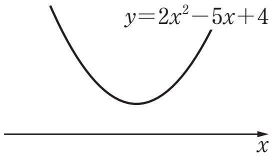



(イ)　2 次方程式 $2x^2-5x+4=0$ の判別式を $D$ とすると

$$D=25-4\cdot2\cdot4=25-32=-7<0$$

よって　$y=2x^2-5x+4$ のグラフは右図.

したがって　$2x^2-5x+4 \geqq 0$ の解は　**すべての実数**




**類題７－４**

次の 2 次不等式を解け.

(1)　$4x^2-4x+1>0$　　(2)　$-x^2+6x-9 \geqq 0$

(3)　$-x^2+x-1>0$　　(4)　$x^2-2x+5 \geqq 0$

(1)　$4x^2-4x+1>0$　より　$(2x-1)^2>0$

よって　$\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$ **以外のすべての実数**

(2)　$-x^2+6x-9 \geqq 0$　より　$x^2-6x+9 \leqq 0$　$(x-3)^2 \leqq 0$

よって　$\boldsymbol{x=3}$

(3)　$-x^2+x-1>0$　より　$x^2-x+1<0$

$x^2-x+1=0$ の判別式を $D$ とすると　$D=1-4=-3<0$

したがって　$x^2-x+1<0$ の　**解はない**

(4)　$x^2-2x+5=0$ の判別式を $D$ とすると　$D=4-4\cdot1\cdot5=4-20=-16<0$

したがって　$x^2-2x+5 \geqq 0$ の解は　**すべての実数**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第８講　２次関数(4)

**例題８－１**
すべての実数 $x$ について $x^2-(k-1)x+3>0$ が成り立つような定数 $k$ の値の範囲を求めよ．

$x^2$ の係数は正
$D=(k-1)^2-4\cdot1\cdot3=k^2-2k-11$　とおくと
すべての実数 $x$ について　$x^2-(k-1)x+3>0$　が成り立つための条件は　$D<0$
よって　$k^2-2k-11<0$　より　$\boldsymbol{1-2\sqrt{3}<k<1+2\sqrt{3}}$

**類題８－１**
次の２次不等式がすべての実数 $x$ で成り立つように定数 $a$ の範囲を定めよ．
(1)　$x^2+ax+3>0$　　(2)　$-x^2+2ax-a-2\leqq0$

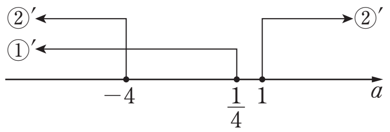
(1)　$x^2$ の係数は正
$D=a^2-4\cdot1\cdot3=a^2-12$　とおくと
すべての実数 $x$ について　$x^2+ax+3>0$　が成り立つための条件は　$D<0$
よって　$a^2-12<0$　より　$\boldsymbol{-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}}$
(2)　$-x^2+2ax-a-2\leqq0$　より　$x^2-2ax+a+2\geqq0$
$D=4a^2-4\cdot1\cdot(a+2)=4a^2-4a-8$　とおくと
すべての実数 $x$ について　$-x^2+2ax-a-2\leqq0$　が成り立つための条件は　$D\leqq0$
よって　$4a^2-4a-8\leqq0$　より　$a^2-a-2\leqq0$　　$(a-2)(a+1)\leqq0$
したがって　$\boldsymbol{-1\leqq a\leqq2}$

**例題８－２**
２次方程式 $x^2-x+a=0$，$x^2+2ax-3a+4=0$ について，次の条件を満たす $a$ の値の範囲を求めよ．
(1)　両方とも実数解をもつ　　(2)　一方のみが実数解をもつ

$x^2-x+a=0$　……①　　$x^2+2ax-3a+4=0$　……②　について，①，②の判別式をそれぞれ $D_1$，$D_2$ とすると
$D_1=1-4a$
$D_2=4a^2-4\cdot1\cdot(-3a+4)=4a^2+12a-16$
①が実数解をもつのは
$D_1\geqq0$　より　$1-4a\geqq0$　　$a\leqq\dfrac{1}{4}$　……①′
②が実数解をもつのは
$D_2\geqq0$　より　$a^2+3a-4\geqq0$　　$(a+4)(a-1)\geqq0$　　$a\leqq-4,\ 1\leqq a$　……②′

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。




(1)　①，②の両方とも実数解をもつのは，

$D_1 \geqq 0$　かつ　$D_2 \geqq 0$　のときである．

①′ かつ ②′ より　$\boldsymbol{a \leqq -4}$

(2)　①，②の一方のみが実数解をもつのは，

$D_1 \geqq 0$，$D_2 \geqq 0$ のいずれか一方のみ成り立つときである．

よって ①′，②′ のいずれか一方のみ成り立つ範囲を求めて　$\boldsymbol{-4 < a \leqq \frac{1}{4},\ 1 \leqq a}$

**類題８－２**

２つの２次方程式 $x^2+(a+1)x-1+a^2=0$ と $x^2-(1-a)x+(a+1)^2=0$ について，次の条件を満たす $a$ の値の範囲を求めよ．

(1)　ともに実数解をもつ　　(2)　少なくとも一方が実数解をもつ

$x^2+(a+1)x-1+a^2=0$　……①　　$x^2-(1-a)x+(a+1)^2=0$　……②　について，①，②の判別式をそれぞれ $D_1$，$D_2$ とすると

$D_1=(a+1)^2-4\cdot1\cdot(-1+a^2)=-3a^2+2a+5$

$D_2=(1-a)^2-4\cdot1\cdot(a+1)^2=-3a^2-10a-3$

①が実数解をもつのは　$D_1 \geqq 0$　より

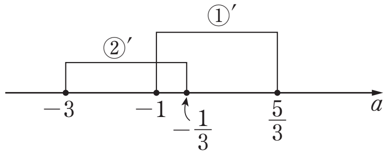
$-3a^2+2a+5 \geqq 0$　　$3a^2-2a-5 \leqq 0$　　$(3a-5)(a+1) \leqq 0$

よって　$-1 \leqq a \leqq \frac{5}{3}$　……①′

②が実数解をもつのは　$D_2 \geqq 0$　より

$-3a^2-10a-3 \geqq 0$　　$3a^2+10a+3 \leqq 0$　　$(3a+1)(a+3) \leqq 0$

よって　$-3 \leqq a \leqq -\frac{1}{3}$　……②′




(1)　①，②がともに実数解をもつのは

$D_1 \geqq 0$　かつ　$D_2 \geqq 0$　のときである．

①′ かつ ②′ より　$\boldsymbol{-1 \leqq a \leqq -\frac{1}{3}}$

(2)　①，②の少なくとも一方が実数解をもつのは

$D_1 \geqq 0$，または　$D_2 \geqq 0$　のときである．

①′ または ②′ より　$\boldsymbol{-3 \leqq a \leqq \frac{5}{3}}$

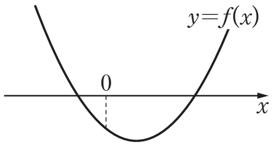
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

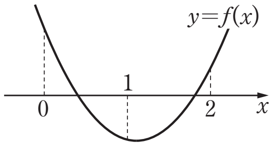
**例題８－３**
2 次方程式 $2x^2-3x-a=0$ が次の条件を満たすとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ．
(1) 正の解と負の解をもつ．
(2) $0<x<1$，$1<x<2$ の範囲でそれぞれ 1 つの実数解をもつ．

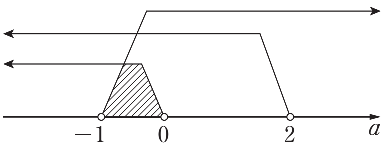
$f(x)=2x^2-3x-a$ とおき，放物線 $y=f(x)$ と $x$ 軸との共有点の $x$ 座標を考える．

(1) $y=f(x)$ が $x>0$，$x<0$ のそれぞれで $x$ 軸と共有点をもてばよい．
よって　$f(0)<0$　より　$-a<0$
したがって　$\boldsymbol{a>0}$




(2) $y=f(x)$ が $0<x<1$，$1<x<2$ のそれぞれで $x$ 軸と共有点をもてばよい．
よって　$f(0)>0$，$f(1)<0$，$f(2)>0$
$f(0)>0$　より　$a<0$
$f(1)<0$　より　$2-3-a<0$　　$a>-1$
$f(2)>0$　より　$8-6-a>0$　　$a<2$
これらの共通部分より　$\boldsymbol{-1<a<0}$



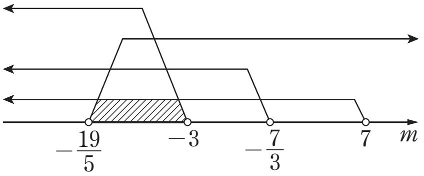




**類題８－３**
2 次方程式 $x^2-mx+m+3=0$ が次の条件を満たすとき，定数 $m$ の値の範囲を求めよ．
(1) $x<-2$，$-2<x$ の範囲に解を 1 つずつもつ．
(2) $-4<x<-2$，$0<x<2$ の範囲に解を 1 つずつもつ．

$f(x)=x^2-mx+m+3$ とおき，放物線 $y=f(x)$ と $x$ 軸との共有点の $x$ 座標を考える．

(1) $f(-2)<0$ であればよい．
よって $4+2m+m+3<0$　より　$\boldsymbol{m<-\dfrac{7}{3}}$

(2) $f(-4)>0$，$f(-2)<0$，$f(0)<0$，$f(2)>0$ であればよい．
$f(-4)>0$　より　$16+4m+m+3>0$　　$m>-\dfrac{19}{5}$
$f(-2)<0$　より　$m<-\dfrac{7}{3}$
$f(0)<0$　より　$m+3<0$　　$m<-3$
$f(2)>0$　より　$4-2m+m+3>0$　　$m<7$
これらの共通部分より　$\boldsymbol{-\dfrac{19}{5}<m<-3}$




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

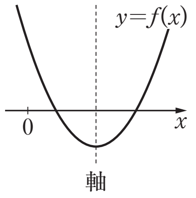
**例題８－４**
2 次方程式 $x^2+2(a-2)x+a=0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

$f(x)=x^2+2(a-2)x+a$ とおく．

$f(x)=\{x+(a-2)\}^2-a^2+5a-4$　より　軸は　$x=-a+2$

また，$f(x)=0$ の判別式を $D$ とすると

$D=\{2(a-2)\}^2-4\cdot1\cdot a=4a^2-20a+16$




放物線 $y=f(x)$ と $x$ 軸の $x>0$ の部分が異なる 2 点で交わるときを考える．それは

$f(0)>0$　……①　　$(f(x)$ の軸$)>0$　……②　　$D>0$　……③

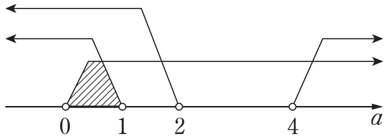
において　①，②，③が同時に成り立つときである．

①より　$a>0$

②より　$-a+2>0$　　$a<2$

③より　$a^2-5a+4>0$　　$(a-1)(a-4)>0$

よって　$a<1,\ 4<a$

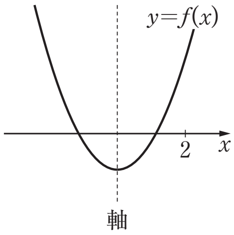



これらの共通部分より　$\boldsymbol{0<a<1}$

**類題８－４**
2 次方程式 $x^2+2ax+2a+3=0$ が 2 より小さい異なる 2 つの解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

$f(x)=x^2+2ax+2a+3$ とおく．

$f(x)=(x+a)^2-a^2+2a+3$　より　軸は　$x=-a$




放物線 $y=f(x)$ と $x$ 軸の $x<2$ の部分が異なる 2 点で交わるときを考える．それは

$f(2)>0$　……①　　$(f(x)$ の軸$)<2$　……②　　$D>0$　……③

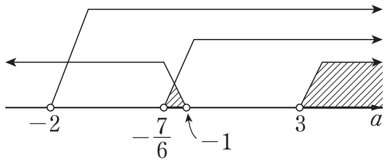
において①，②，③が同時に成り立つときである．

①より　$6a+7>0$　　$a>-\dfrac{7}{6}$

②より　$-a<2$　　$a>-2$

③より　$4a^2-4\cdot1\cdot(2a+3)>0$　　$a^2-2a-3>0$

$(a+1)(a-3)>0$　　よって　$a<-1,\ 3<a$




これらの共通部分より　$\boldsymbol{-\dfrac{7}{6}<a<-1,\ 3<a}$

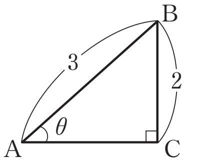


ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第９講　三角比(1)

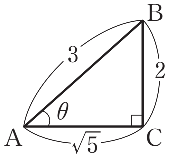
**例題９－１**

右の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ．




$AC=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

よって　$\sin\theta=\frac{BC}{AB}=\mathbf{\frac{2}{3}}$　　$\cos\theta=\frac{AC}{AB}=\mathbf{\frac{\sqrt{5}}{3}}$　　$\tan\theta=\frac{BC}{AC}=\mathbf{\frac{2}{\sqrt{5}}}$

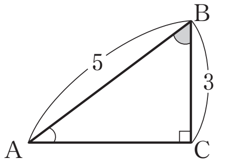



**類題９－１**

右の図において，次の値を求めよ．

(1)　$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$

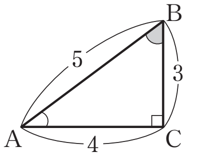
(2)　$\sin B$，$\cos B$，$\tan B$




$AC=\sqrt{5^2-3^2}=4$

(1)　$\sin A=\frac{BC}{AB}=\mathbf{\frac{3}{5}}$　　$\cos A=\frac{AC}{AB}=\mathbf{\frac{4}{5}}$　　$\tan A=\frac{BC}{AC}=\mathbf{\frac{3}{4}}$

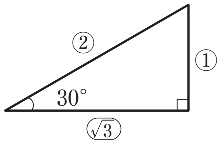
(2)　$\sin B=\frac{AC}{AB}=\mathbf{\frac{4}{5}}$　　$\cos B=\frac{BC}{AB}=\mathbf{\frac{3}{5}}$　　$\tan B=\frac{AC}{BC}=\mathbf{\frac{4}{3}}$




**例題９－２**

$\sin 30^\circ$，$\cos 30^\circ$，$\tan 30^\circ$　の値を求めよ．

$\sin 30^\circ=\mathbf{\frac{1}{2}}$　　$\cos 30^\circ=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$　　$\tan 30^\circ=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{3}}}$




ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

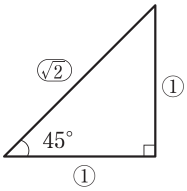
**類題9－2**

次の値を求めよ．

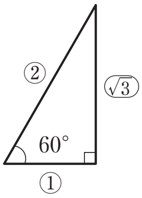
(1)　$\sin 45^\circ$，$\cos 45^\circ$，$\tan 45^\circ$

(2)　$\sin 60^\circ$，$\cos 60^\circ$，$\tan 60^\circ$

(1)　$\sin 45^\circ = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$　　$\cos 45^\circ = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$　　$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$




(2)　$\sin 60^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$　　$\cos 60^\circ = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$　　$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$




**例題9－3**

$\theta$ は鋭角とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\tan\theta = 2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(1)　$\sin\theta = \frac{1}{3}$ より　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

$\theta$ は鋭角より　$\cos\theta > 0$　　よって　$\cos\theta = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

(2)　$\tan\theta = 2$ より　$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + 4 = 5$　　$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$

$\theta$ は鋭角より　$\cos\theta > 0$　　よって　$\cos\theta = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より　$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題９－３**

$\theta$ は鋭角とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\tan\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(1)　$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ より　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\dfrac{9}{16}=\dfrac{7}{16}$

$\theta$ は鋭角より　$\sin\theta>0$　　よって　$\sin\theta=\mathbf{\dfrac{\sqrt{7}}{4}}$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}}=\mathbf{\frac{\sqrt{7}}{3}}$$

(2)　$\tan\theta=\dfrac{2}{3}$ より　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\dfrac{4}{9}=\dfrac{13}{9}$　　$\cos^2\theta=\dfrac{9}{13}$

$\theta$ は鋭角より　$\cos\theta>0$　　よって　$\cos\theta=\mathbf{\dfrac{3}{\sqrt{13}}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\mathbf{\dfrac{2}{\sqrt{13}}}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題９－４**

次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ.

(1)　$\sin 70^\circ$　　(2)　$\cos 84^\circ$　　(3)　$\tan 50^\circ$

(1)　$\sin 70^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \mathbf{\cos 20^\circ}$

(2)　$\cos 84^\circ = \cos(90^\circ - 6^\circ) = \mathbf{\sin 6^\circ}$

(3)　$\tan 50^\circ = \tan(90^\circ - 40^\circ) = \mathbf{\dfrac{1}{\tan 40^\circ}}$

**類題９－４**

次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ.

(1)　$\sin 54^\circ$　　(2)　$\cos 88^\circ$　　(3)　$\tan 72^\circ$

(1)　$\sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ)$

$= \mathbf{\cos 36^\circ}$

(2)　$\cos 88^\circ = \cos(90^\circ - 2^\circ)$

$= \mathbf{\sin 2^\circ}$

(3)　$\tan 72^\circ = \tan(90^\circ - 18^\circ)$

$= \mathbf{\dfrac{1}{\tan 18^\circ}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 10 講　三角比(2)

**例題 10 － 1**

次の値を求めよ．

(1)　$\sin 120°$　　(2)　$\sin 135°$　　(3)　$\sin 150°$

(1)　$\sin 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\sin 135° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　$\sin 150° = \dfrac{1}{2}$

**類題 10 － 1**

次の表をうめよ．

| $\theta$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | | | | | | | | | |

| $\theta$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $0$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $\dfrac{1}{2}$ | $0$ |

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 10 － 2**

次の値を求めよ．

(1)　$\cos 120^\circ$　　(2)　$\cos 135^\circ$　　(3)　$\cos 150^\circ$

(1)　$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

(2)　$\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**類題 10 － 2**

次の表をうめよ．

| $\theta$ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\theta$ | | | | | | | | | |

| $\theta$ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\theta$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 10 − 3**

次の値を求めよ.

(1)　$\tan 120^\circ$　(2)　$\tan 135^\circ$　(3)　$\tan 150^\circ$

(1)　$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

(2)　$\tan 135^\circ = -1$

(3)　$\tan 150^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

**類題 10 − 3**

次の表をうめよ.

| $\theta$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tan\theta$ | | | | | ／ | | | | |

| $\theta$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tan\theta$ | $0$ | $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | ／ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ |

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 10 － 4**

(1)　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とするとき，次の方程式を解け．

(ア)　$\sin\theta = \frac{1}{2}$　(イ)　$\cos\theta = -\frac{1}{2}$　(ウ)　$\tan\theta = -1$

(2)　次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ．

(ア)　$\sin 140°$　(イ)　$\cos 155°$　(ウ)　$\tan 160°$

(1)(ア)　$\boldsymbol{\theta = 30°,\ 150°}$

(イ)　$\boldsymbol{\theta = 120°}$

(ウ)　$\boldsymbol{\theta = 135°}$

(2)(ア)　$\sin 140° = \sin(180° - 40°)$

$= \boldsymbol{\sin 40°}$

(イ)　$\cos 155° = \cos(180° - 25°)$

$= \boldsymbol{-\cos 25°}$

(ウ)　$\tan 160° = \tan(180° - 20°)$

$= \boldsymbol{-\tan 20°}$

**類題 10 － 4**

(1)　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とするとき，次の方程式を解け．

(ア)　$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$　(イ)　$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　(ウ)　$\tan\theta = \sqrt{3}$

(2)　次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ．

(ア)　$\sin 168°$　(イ)　$\cos 174°$　(ウ)　$\tan 142°$

(1)(ア)　$\boldsymbol{\theta = 45°,\ 135°}$

(イ)　$\boldsymbol{\theta = 150°}$

(ウ)　$\boldsymbol{\theta = 60°}$

(2)(ア)　$\sin 168° = \sin(180° - 12°)$

$= \boldsymbol{\sin 12°}$

(イ)　$\cos 174° = \cos(180° - 6°)$

$= \boldsymbol{-\cos 6°}$

(ウ)　$\tan 142° = \tan(180° - 38°)$

$= \boldsymbol{-\tan 38°}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第11講　三角比(3)

**例題 11－1**

△ABC において，外接円の半径を $R$ とする．次のものを求めよ．

(1)　$a=5$，$A=30^\circ$，$B=45^\circ$ のとき　$b$

(2)　$b=1$，$c=\sqrt{3}$，$C=120^\circ$ のとき　$B$，$A$

(3)　$a=10$，$A=60^\circ$ のとき　$R$

(1)　正弦定理より　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$　つまり　$\dfrac{5}{\sin 30^\circ}=\dfrac{b}{\sin 45^\circ}$

$$b=\frac{5}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 45^\circ=5\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{5\sqrt{2}}$$

(2)　正弦定理より　$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$　つまり　$\dfrac{1}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$

$\sin B=\dfrac{\sin 120^\circ}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$　　$C=120^\circ$ より　$B<60^\circ$　　よって　$B=\mathbf{30^\circ}$

$A=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=\mathbf{30^\circ}$

(3)　正弦定理より　$\dfrac{a}{\sin A}=2R$　つまり　$\dfrac{10}{\sin 60^\circ}=2R$

$$R=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{\sin 60^\circ}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{10}{\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$$

**類題 11－1**

△ABC において，外接円の半径を $R$ とする．次のものを求めよ．

(1)　$b=6$，$A=45^\circ$，$B=60^\circ$　のとき　$a$

(2)　$b=\sqrt{6}$，$c=2$，$C=45^\circ$ のとき　$B$，$A$

(3)　$a=4$，$A=30^\circ$ のとき　$R$

(1)　正弦定理より　$\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{6}{\sin 60^\circ}$

$$a=\frac{6}{\sin 60^\circ}\cdot\sin 45^\circ=6\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{2\sqrt{6}}$$

(2)　正弦定理より　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin B}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$

$$\sin B=\sqrt{6}\cdot\frac{\sin 45^\circ}{2}=\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$C=45^\circ$ より　$B<135^\circ$　よって　$B=60^\circ$，$120^\circ$

$B=\mathbf{60^\circ}$　のとき　$A=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=\mathbf{75^\circ}$

$B=\mathbf{120^\circ}$　のとき　$A=180^\circ-(45^\circ+120^\circ)=\mathbf{15^\circ}$

(3)　正弦定理より　$\dfrac{4}{\sin 30^\circ}=2R$　　すなわち　　$R=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{\sin 30^\circ}=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=\mathbf{4}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 11 － 2**

△ABC において，次のものを求めよ．

(1)　$a=3$，$b=4$，$C=120^\circ$ のとき　$c$

(2)　$a=13$，$b=7$，$c=15$ のとき　$A$

(3)　$c=2\sqrt{6}$，$a=4$，$C=60^\circ$ のとき　$b$

(1)　余弦定理より

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos120^\circ$$

$$=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=37$$

$c>0$ より　$c=\boldsymbol{\sqrt{37}}$

(2)　余弦定理より　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{7^2+15^2-13^2}{2\cdot7\cdot15}=\dfrac{105}{2\cdot7\cdot15}=\dfrac{1}{2}$

よって　$A=\boldsymbol{60^\circ}$

(3)　余弦定理より　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

つまり　$(2\sqrt{6})^2=4^2+b^2-2\cdot4\cdot b\cdot\cos60^\circ$

$b^2-4b-8=0$

$b>0$ より　$b=\boldsymbol{2+2\sqrt{3}}$

**類題 11 － 2**

△ABC において，次のものを求めよ．

(1)　$b=3$，$c=2\sqrt{3}$，$A=30^\circ$ のとき　$a$

(2)　$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{10}$，$c=2$ のとき　$B$

(3)　$a=2$，$b=\sqrt{6}$，$B=60^\circ$ のとき　$c$

(1)　余弦定理より

$$a^2=3^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot3\cdot2\sqrt{3}\cdot\cos30^\circ$$

$$=9+12-12\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3$$

$a>0$ より　$a=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(2)　余弦定理より　$\cos B=\dfrac{2^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{10})^2}{2\cdot2\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{-4}{2\cdot2\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$B=\boldsymbol{135^\circ}$

(3)　余弦定理より　$(\sqrt{6})^2=c^2+2^2-2\cdot c\cdot2\cdot\cos60^\circ$

$c^2-2c-2=0$

$c>0$ より　$c=\boldsymbol{1+\sqrt{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 11 ー 3**

次の各場合について，△ABC の残りの辺と角の大きさを求めよ．

(1)　$a=2\sqrt{3}$，$c=3-\sqrt{3}$，$B=120°$

(2)　$a=8$，$A=45°$，$C=30°$

(1)　余弦定理より

$$b^2=(3-\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot(3-\sqrt{3})\cdot2\sqrt{3}\cdot\cos120°$$

$$=9-6\sqrt{3}+3+12-4\sqrt{3}(3-\sqrt{3})\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=18$$

$b>0$ より　$b=\mathbf{3\sqrt{2}}$

正弦定理より

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin A}=\frac{3\sqrt{2}}{\sin120°}$$

$$\sin A=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\sin120°$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$B=120°$ より　$A<60°$　　よって　$A=\mathbf{45°}$

$C=180°-(120°+45°)=\mathbf{15°}$

(2)　正弦定理より

$$\frac{c}{\sin30°}=\frac{8}{\sin45°}$$

$$c=\frac{8}{\sin45°}\cdot\sin30°$$

$$=8\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{4\sqrt{2}}$$

$B=180°-(45°+30°)=\mathbf{105°}$

余弦定理より

$(4\sqrt{2})^2=b^2+8^2-2\cdot8\cdot b\cdot\cos30°$

$b^2-8\sqrt{3}b+32=0$

$b=4\sqrt{3}\pm4$

$B$ が最大角より $b$ が最大辺

よって　$b=\mathbf{4\sqrt{3}+4}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 11 ー 3**
次の各場合について，△ABC の残りの辺と角の大きさを求めよ．
(1)　$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}-1$，$A=135^\circ$
(2)　$a=\sqrt{2}$，$B=45^\circ$，$C=105^\circ$

(1)　余弦定理より

$$a^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\cos 135^\circ$$
$$=2+3-2\sqrt{3}+1-2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4$$

$a>0$ より　$a=\mathbf{2}$

正弦定理より

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin B}=\frac{2}{\sin 135^\circ}$$
$$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 135^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$A=135^\circ$ より　$B<45^\circ$　　よって　$B=\mathbf{30^\circ}$

$C=180^\circ-(135^\circ+30^\circ)=\mathbf{15^\circ}$

(2)　$A=180^\circ-(45^\circ+105^\circ)=\mathbf{30^\circ}$

正弦定理より

$$\frac{b}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$$
$$b=\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 45^\circ$$
$$=\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{2}$$

余弦定理より

$$2^2=c^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot c\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ$$
$$c^2-2c-2=0$$
$$c=1\pm\sqrt{3}$$

$c>0$ より　$c=\mathbf{1+\sqrt{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 11 － 4**

次のような △ABC の面積 $S$ を求めよ．

(1)　$a=6$，$b=5$，$C=30^\circ$

(2)　$a=6$，$b=7$，$c=11$

(1)　$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\sin30^\circ=\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{15}{2}}$

(2)　余弦定理より　$\cos C=\frac{36+49-121}{2\cdot6\cdot7}=\frac{-36}{2\cdot6\cdot7}=-\frac{3}{7}$

$\sin^2C=1-\cos^2C=1-\left(-\frac{3}{7}\right)^2=\frac{40}{49}$

$\sin C>0$ より　$\sin C=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

よって　$S=\frac{1}{2}ab\sin C$

$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot7\cdot\frac{2\sqrt{10}}{7}=\mathbf{6\sqrt{10}}$

**類題 11 － 4**

次のような △ABC の面積 $S$ を求めよ．

(1)　$a=2\sqrt{2}$，$c=3$，$B=45^\circ$

(2)　$a=8$，$b=6$，$c=4$

(1)　$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\sqrt{2}\cdot\sin45^\circ=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{3}$

(2)　余弦定理より　$\cos A=\frac{36+16-64}{2\cdot6\cdot4}=\frac{-12}{2\cdot6\cdot4}=-\frac{1}{4}$

$\sin^2A=1-\cos^2A=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

$\sin A>0$　より　$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$

よって　$S=\frac{1}{2}bc\sin A$

$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\mathbf{3\sqrt{15}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 12 講　平面図形(1)

**例題 12 － 1**

(1)　3 辺の長さが $x$，2，3 である三角形が存在するときの $x$ の範囲を求めよ．

(2)　長さが 3，4，6 の線分を 3 辺とする三角形は存在するか．存在する場合は，その三角形が鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるか答えよ．

(1)　3 辺の長さが $x$，2，3 である三角形が存在するための条件は

$3-2<x<3+2$　　よって　$\mathbf{1<x<5}$

(2)　$4-3=1$　　　$4+3=7$

$1<6<7$　より　3，4，6 を 3 辺の長さとする三角形は　**存在する**．

$3^2+4^2=25$　　$6^2=36$

よって　$3^2+4^2<6^2$　より　**鈍角三角形である**．

**類題 12 － 1**

(1)　3 辺の長さが $x$，3，5 である三角形が存在するときの $x$ の範囲を求めよ．

(2)　次の長さの線分を 3 辺とする三角形は存在するか．存在する場合は，その三角形が鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるか答えよ．

(ア)　4，5，6　　　　(イ)　5，9，15

(1)　3 辺の長さが $x$，3，5 である三角形が存在するための条件は

$5-3<x<5+3$　　よって　$\mathbf{2<x<8}$

(2)(ア)　$5-4=1$　　　$5+4=9$

$1<6<9$　より　4，5，6 を 3 辺の長さとする三角形は　**存在する**．

$4^2+5^2=41$　　$6^2=36$

よって　$4^2+5^2>6^2$　より　**鋭角三角形である**．

(イ)　$9-5=4$　　　$9+5=14$

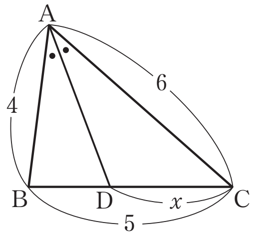
$14<15$　より　5，9，15 を 3 辺の長さとする三角形は　**存在しない**．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 12 － 2**

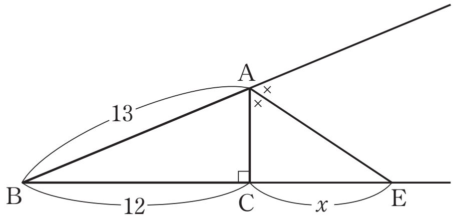
次の図において，$x$ の値を求めよ．

(1)




ADは∠Aの二等分線

(2)




AEは∠Aの外角の二等分線

(1)　角の二等分線の性質より　AB：AC＝BD：DC

＝4：6＝2：3

よって　$x=\text{BC}\times\dfrac{3}{5}=5\times\dfrac{3}{5}=\mathbf{3}$

(2)　三平方の定理より　AC＝5

外角の二等分線の性質より　AB：AC＝BE：CE＝13：5

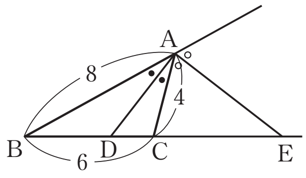
よって　$13:5=(12+x):x$　　$13x=5(12+x)$　　$x=\mathbf{\dfrac{15}{2}}$

**類題 12 － 2**

AB＝8，BC＝6，CA＝4である△ABCにおいて∠Aおよびその外角の二等分線が直線BCと交わる点をそれぞれD，Eとする．次の問いに答えよ．

(1)　線分BDの長さを求めよ．

(2)　線分CEの長さを求めよ．




(1)　角の二等分線の性質より　AB：AC＝BD：DC

＝8：4＝2：1

よって　$\text{BD}=\text{BC}\times\dfrac{2}{3}=6\times\dfrac{2}{3}=\mathbf{4}$

(2)　外角の二等分線の性質より　AB：AC＝BE：EC

＝2：1

よって　CE＝$x$　とすると

$2:1=(x+6):x$　　$2x=x+6$　　$x=6$

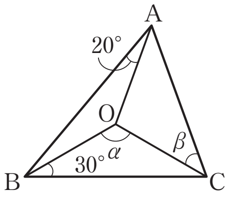
ゆえに　CE＝**6**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

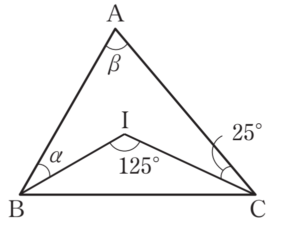
**例題 12 ー 3**

下の図において，点Oは△ABCの外心，点Iは△ABCの内心である．角$\alpha$，$\beta$を求めよ．

(1)




(2)



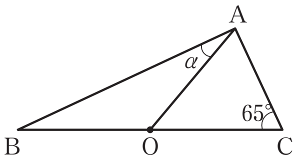

(1)　$\alpha=\mathbf{120°}$，$\beta=\mathbf{40°}$

(2)　$\alpha=\mathbf{30°}$，$\beta=\mathbf{70°}$

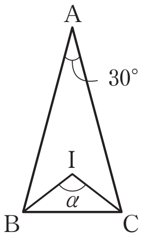
**類題 12 ー 3**

下の図において，点Oは△ABCの外心，点Iは△ABCの内心である．角$\alpha$を求めよ．

(1)




(2)




(1)　$\alpha=\mathbf{25°}$

(2)　$\alpha=\mathbf{105°}$

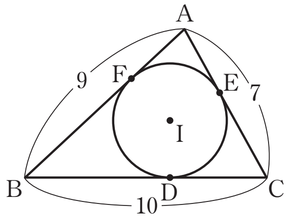
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 12 － 4**

AB＝9，BC＝10，CA＝7 の △ABC の内接円の中心を I とし，この内接円が辺 BC，CA，AB と接する点をそれぞれ D，E，F とする．次の問いに答えよ．

(1)　AF の長さを求めよ．

(2)　△ABC の面積は $6\sqrt{26}$ である．これを利用して，△ABC の内接円の半径 $r$ を求めよ．




(1)　AF＝AE＝$x$ とおくと，BF＝BD＝$9-x$，EC＝DC＝$7-x$

BC＝BD＋DC より　$10=(9-x)+(7-x)$　　$x=3$　　よって　AF＝**3**

(2)　△ABC＝△IAB＋△IBC＋△ICA　より

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot r+\frac{1}{2}\cdot BC\cdot r+\frac{1}{2}\cdot CA\cdot r=\frac{1}{2}r(AB+BC+CA)$$

よって　$6\sqrt{26}=\frac{1}{2}r(9+10+7)$　より　$r=\boldsymbol{\frac{6\sqrt{26}}{13}}$

（参考）　△ABC の面積について

△ABC で余弦定理より　$\cos A=\frac{9^2+7^2-10^2}{2\cdot 9\cdot 7}=\frac{30}{2\cdot 9\cdot 7}=\frac{5}{21}$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{21}\right)^2}=\frac{4\sqrt{26}}{21}$$

よって　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin A=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 9\cdot \frac{4\sqrt{26}}{21}=6\sqrt{26}$

**類題 12 － 4**

AB＝13, BC＝12, CA＝5 の △ABC の内接円の中心を I とし，この内接円が辺 BC，CA，AB と接する点をそれぞれ D，E，F とする．次の問いに答えよ．

(1)　AF の長さを求めよ．

(2)　△ABC は鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれかを答えよ．また，内接円の半径 $r$ を求めよ．

(1)　AF＝AE＝$x$ とおくと，BF＝BD＝$13-x$，EC＝DC＝$5-x$

BC＝BD＋DC より　$12=(13-x)+(5-x)$　　$x=3$　　よって　AF＝**3**

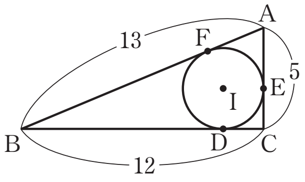
(2)　$5^2+12^2=169$　　$13^2=169$　より　$5^2+12^2=13^2$

よって △ABC は $\angle C=90^\circ$ の**直角三角形である**.

△ABC＝△IAB＋△IBC＋△ICA　より

$$\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CA=\frac{1}{2}r(AB+BC+CA)$$

よって　$\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 5=\frac{1}{2}r(13+12+5)$　　したがって　$r=\mathbf{2}$



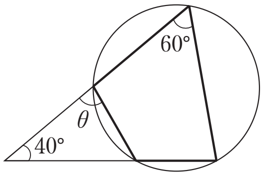

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 13 講　平面図形(2)

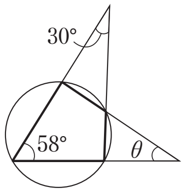
**例題 13 ー 1**

(1)　次の図において，角 $\theta$ の大きさを求めよ．

(ア)

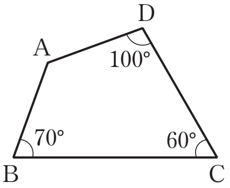



(イ)

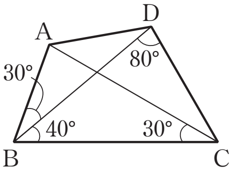



(2)　次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものを選べ．

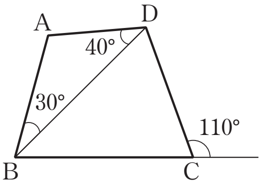
①




②




③



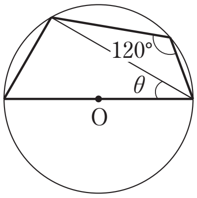

(1)　(ア)　$\theta=80°$　　(イ)　$\theta=34°$

(2)　②，③

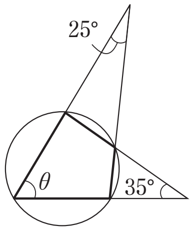
**類題 13 ー 1**

(1)　次の図において，角 $\theta$ の大きさを求めよ．ただし，O は円の中心とする．

(ア)

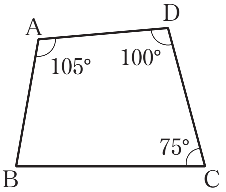



(イ)

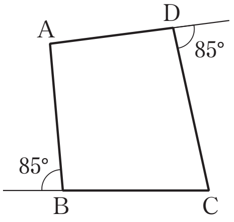



(2)　次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものを選べ．

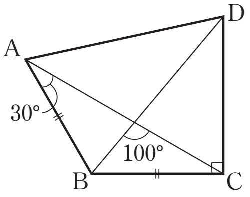
①




②




③




(1)　(ア)　$\theta=30°$　　(イ)　$\theta=60°$

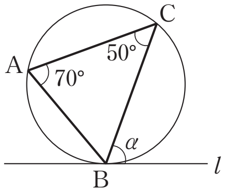
(2)　①

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 13 － 2**

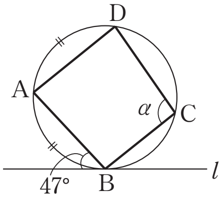
下の図において，角 $\alpha$ を求めよ．ただし，直線 $l$，$m$ は円の接線である．

(1)



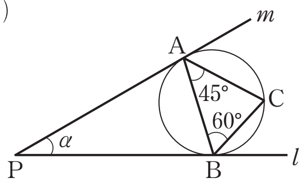

点 B は円の接点

(2)




点 B は円の接点，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$

(3)



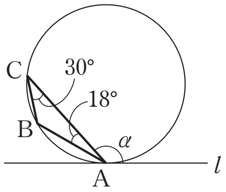

点 A，B は円の接点

(1)　$\alpha=$ **70°**　　(2)　$\alpha=$ **94°**　　(3)　$\alpha=$ **30°**

**類題 13 － 2**

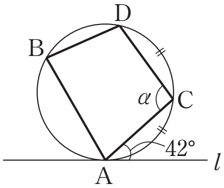
下の図において，角 $\alpha$ を求めよ．ただし，直線 $l$，$m$ は円の接線である．

(1)



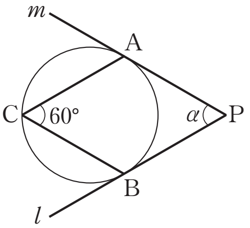

点 A は円の接点

(2)




点 A は円の接点，$\overset{\frown}{\mathrm{CA}}=\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$

(3)




点 A，B は円の接点

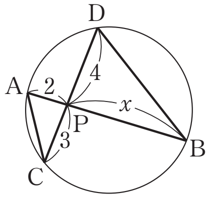
(1)　$\alpha=$ **132°**　　(2)　$\alpha=$ **96°**　　(3)　$\alpha=$ **60°**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

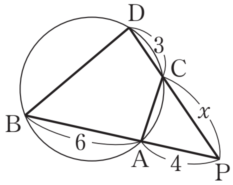
**例題 13 － 3**

次の図において，$x$ の値を求めよ．

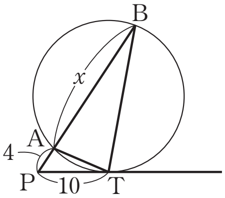
(1)




(2)




(3)




PT は円の接線．T は接点

(1)　方べきの定理より　PA・PB＝PC・PD

よって　$2\cdot x=3\cdot 4$　より　$x=\mathbf{6}$

(2)　方べきの定理より　PA・PB＝PC・PD

よって　$x\cdot(x+3)=4\cdot 10$　　$x^2+3x-40=0$

$(x+8)(x-5)=0$　　$x>0$ より　$x=\mathbf{5}$

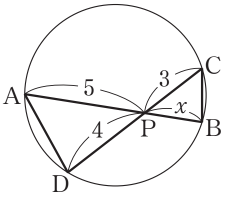
(3)　方べきの定理より　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$

よって　$4\cdot(4+x)=10^2$　　$4x=84$　　$x=\mathbf{21}$

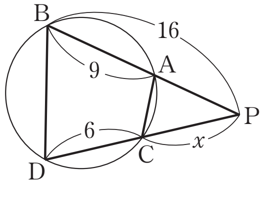
**類題 13 － 3**

次の図において，$x$ の値を求めよ．

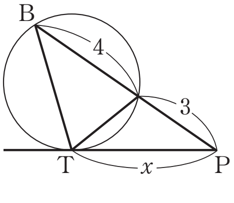
(1)




(2)




(3)




PT は円の接線．T は接点

(1)　方べきの定理より　PA・PB＝PC・PD

よって　$5\cdot x=4\cdot 3$　　$x=\mathbf{\dfrac{12}{5}}$

(2)　方べきの定理より　PA・PB＝PC・PD

よって　$7\cdot 16=x\cdot(x+6)$　　$x^2+6x-112=0$

$(x+14)(x-8)=0$　　$x>0$ より　$x=\mathbf{8}$

(3)　方べきの定理より　$\mathrm{PT}^2=\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$

よって　$x^2=3\cdot 7$　　$x^2=21$　　$x>0$ より　$x=\mathbf{\sqrt{21}}$

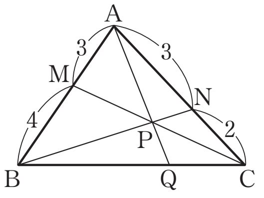
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 13 － 4**

右の図において，次の問いに答えよ．

(1)　BQ：QC を求めよ．

(2)　CP：PM，BP：PN を求めよ．




(1)　チェバの定理より　$\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CN}{NA}=1$

つまり　$\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{2}{3}=1$　　$\dfrac{BQ}{QC}=\dfrac{2}{1}$　　よって　BQ：QC＝**2：1**

(2)　メネラウスの定理より　$\dfrac{AB}{BM}\cdot\dfrac{MP}{PC}\cdot\dfrac{CN}{NA}=1$

つまり　$\dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{MP}{PC}\cdot\dfrac{2}{3}=1$　　$\dfrac{MP}{PC}=\dfrac{6}{7}$　　よって　CP：PM＝**7：6**

同様に　$\dfrac{AC}{CN}\cdot\dfrac{NP}{PB}\cdot\dfrac{BM}{MA}=1$

つまり　$\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{NP}{PB}\cdot\dfrac{4}{3}=1$　　$\dfrac{NP}{PB}=\dfrac{3}{10}$　　よって　BP：PN＝**10：3**

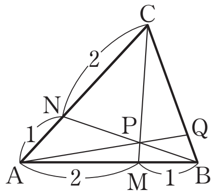
**類題 13 － 4**

右の図において，次の問いに答えよ．

(1)　BQ：QC を求めよ．

(2)　BP：PN，CP：PM を求めよ．

(3)　QP：PA を求めよ．




(1)　チェバの定理より　$\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CN}{NA}=1$

つまり　$\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{2}{1}=1$　　$\dfrac{BQ}{QC}=\dfrac{1}{4}$　　よって　BQ：QC＝**1：4**

(2)　メネラウスの定理より　$\dfrac{AC}{CN}\cdot\dfrac{NP}{PB}\cdot\dfrac{BM}{MA}=1$

つまり　$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{NP}{PB}\cdot\dfrac{1}{2}=1$　　$\dfrac{NP}{PB}=\dfrac{4}{3}$　　よって　BP：PN＝**3：4**

同様に　$\dfrac{AB}{BM}\cdot\dfrac{MP}{PC}\cdot\dfrac{CN}{NA}=1$

つまり　$\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{MP}{PC}\cdot\dfrac{2}{1}=1$　　$\dfrac{MP}{PC}=\dfrac{1}{6}$　　よって　CP：PM＝**6：1**

(3)　(2)と同様に　$\dfrac{CB}{BQ}\cdot\dfrac{QP}{PA}\cdot\dfrac{AN}{NC}=1$

つまり　$\dfrac{5}{1}\cdot\dfrac{QP}{PA}\cdot\dfrac{1}{2}=1$　　$\dfrac{QP}{PA}=\dfrac{2}{5}$　　よって　QP：PA＝**2：5**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第14講　場合の数(1)

**例題 14－1**
1から100までの整数のうち，次の数の個数を求めよ．
(1)　3の倍数
(2)　5の倍数でない数
(3)　15の倍数
(4)　3または5の倍数

1から100までの整数全体の集合を全体集合 $U$ とし，3の倍数全体の集合を $A$，5の倍数全体の集合を $B$ とする．

(1)　$100\div 3=33$ あまり1　より　$n(A)=$ **33（個）**

(2)　5の倍数でない数全体の集合は $\overline{B}$ で表される．
　　$100\div 5=20$ より　　求める個数は　$n(\overline{B})=n(U)-n(B)=100-20=$ **80（個）**

(3)　15の倍数全体の集合は　$A\cap B$ で表される．
　　$100\div 15=6$ あまり10　　よって求める個数は　$n(A\cap B)=$ **6（個）**

(4)　3または5の倍数全体の集合は　$A\cup B$ で表される．
　　よって求める個数は　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=33+20-6=$ **47（個）**

**類題 14－1**
1から100までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ．
(1)　2の倍数
(2)　14の倍数
(3)　2または7の倍数

1から100までの整数全体の集合を全体集合 $U$ とし，2の倍数全体の集合を $A$，7の倍数全体の集合を $B$ とする．

(1)　$100\div 2=50$ より　$n(A)=$ **50（個）**

(2)　14の倍数全体の集合は　$A\cap B$ で表される．
　　$100\div 14=7$ あまり2　　よって求める個数は　$n(A\cap B)=$ **7（個）**

(3)　$100\div 7=14$ あまり2　より　$n(B)=14$（個）
　　2または7の倍数全体の集合は　$A\cup B$ で表される．
　　よって求める個数は　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=50+14-7=$ **57（個）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 14 ― 2**
大小2つのさいころを投げるとき，次のようになる場合は何通りあるか.
(1)　目の和が6または9
(2)　目の和が10以下
(3)　目の積が奇数

2個のさいころの出目を　(大きいさいころの出目，小さいさいころの出目)　と表す.
(1)　(i)　目の和が6になるのは　(1，5)，(2，4)，(3，3)，(4，2)，(5，1)の5通り
(ii)　目の和が9になるのは　(3，6)，(4，5)，(5，4)，(6，3)の4通り
(i)と(ii)は同時におこらない．したがって求める場合の数は $5+4=$**9（通り）**
(2)　2個のさいころの目の出方は $6\times6=36$（通り）
目の和が10以下にならないのは目の和が11以上，つまり和が11または12になるときである.
(i)　目の和が11になるのは　(5，6)，(6，5)の2通り
(ii)　目の和が12になるのは　(6，6)の1通り
(i)と(ii)は同時におこらない．よって目の和が11以上になるのは　$2+1=3$（通り）
したがって求める場合の数は $36-3=$**33（通り）**
(3)　目の積が奇数になる場合は，2つの目がともに奇数のとき
よって　$3\times3=$**9（通り）**

**類題 14 ― 2**
1個のさいころを2回投げるとき，次のようになる場合は何通りあるか.
(1)　目の和が5の倍数
(2)　目の和が5以上
(3)　目の積が偶数

2回のさいころの出目を　(1回目の出目，2回目の出目)　と表す.
(1)　目の和が5の倍数となるのは，和が5または10になる場合である.
(i)　目の和が5となるのは　(1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1)の4通り
(ii)　目の和が10となるのは　(4，6)，(5，5)，(6，4)の3通り
(i)と(ii)は同時におこらない．したがって求める場合の数は　$4+3=$**7（通り）**
(2)　2回のさいころの目の出方は $6\times6=36$（通り）
目の和が5以上にならないのは目の和が4以下になるとき，つまり和が4または3または2になるときである.
(i)　目の和が4になるのは　(1，3)，(2，2)，(3，1)の3通り
(ii)　目の和が3になるのは　(1，2)，(2，1)の2通り
(iii)　目の和が2になるのは　(1，1)の1通り

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(i), (ii), (iii)はいずれも同時におこらない.

よって目の和が 4 以下になるのは　3＋2＋1＝6（通り）

したがって求める場合の数は　36－6＝**30（通り）**

(3)　目の積が偶数にならないのは，積が奇数になるとき．それは，2 回の目がともに奇数のときで，3×3＝9（通り）

よって求める場合の数は　36－9＝**27（通り）**

**例題 14 ー 3**

(1)　$a$，$b$，$c$，$d$ の 4 つの文字から 2 文字を選んで 1 列に並べる方法は何通りあるか．また，この 4 つの文字をすべて使って 1 列に並べる方法は何通りあるか.

(2)　6 個の数字 1，2，3，4，5，6 から異なる 3 個を選んで 3 桁の整数を作るとき，偶数は何個できるか.

(1)　$a$，$b$，$c$，$d$ の 4 つの文字から 2 文字を選んで 1 列に並べる方法は，

異なる 4 つのものから 2 つを取って並べる順列で　$_4P_2=4\cdot3=$**12（通り）**

また，$a$，$b$，$c$，$d$ の 4 つの文字すべてを使って 1 列に並べる方法は，

異なる 4 つのものすべてを並べる順列で　$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=$**24（通り）**

(2)　偶数となるのは，一の位が 2，4，6 のいずれかで　3 通り

その各々に対し，百，十の位は残り 5 つのものから 2 つを選んで並べる順列で　$_5P_2$ 通り

よって求める個数は　$3\times{}_5P_2=3\times5\cdot4=$**60（個）**

**類題 14 ー 3**

(1)　6 人の生徒から委員長，副委員長，書記，会計を選ぶ方法は何通りあるか.

(2)　5 個の数字 1，2，3，4，5 をすべて使ってつくる 5 桁の整数について，次のものはいくつできるか.

(ア)　5 桁の整数の総数　　　(イ)　奇数

(1)　異なる 6 つのものから 4 つを取って並べる順列で　$_6P_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=$**360（通り）**

(2)　(ア)　異なる 5 つのものすべてを並べる順列で　$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=$**120（個）**

(イ)　奇数となるのは，一の位が 1，3，5 のいずれかで　3 通り

残りの 4 桁は残り 4 つのものすべてを並べる順列で　4! 通り

よって求める個数は　$3\times4!=3\times4\cdot3\cdot2\cdot1=$**72（個）**

ⓒRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 14 － 4**

男子 4 人，女子 2 人が 1 列に並ぶとき，次の問いに答えよ.

(1)　両端が女子である並び方は何通りあるか.

(2)　女子 2 人が隣り合う並び方は何通りあるか.

(3)　女子が隣り合わない並び方は何通りあるか.

(1)　女子 2 人が両端に並ぶ方法は　2! 通り

その間に男子 4 人を並べる方法は　4! 通り

よって求める場合の数は　$2!\times 4!=2\times 24=$**48（通り）**

(2)　隣り合う女子 2 人の並び方は　2! 通り

女子 2 人を 1 組と考え，この 1 組と男子 4 人を並べる方法は　5! 通り

よって求める場合の数は　$2!\times 5!=2\times 120=$**240（通り）**

(3)　6 人全員の並べ方の総数は　6! 通り

よって女子が隣り合わない並び方は

(全体)－(女子が隣り合う)＝$6!-240=720-240=$**480（通り）**

**（別解）**　男子 4 人の並べ方は　4! 通り

この 4 人の間または両端の 5 カ所に女子 2 人を並べる方法は　${}_5P_2$ 通り

よって求める場合の数は　$4!\times {}_5P_2=24\times 20=480$（通り）

**類題 14 － 4**

男子 3 人，女子 4 人が 1 列に並ぶとき，次の問いに答えよ.

(1)　両端が男子である並び方は何通りあるか.

(2)　男子 3 人が隣り合う並び方は何通りあるか.

(3)　男子が隣り合わない並び方は何通りあるか.

(1)　男子 3 人のうち 2 人が両端に並ぶ並び方は　${}_3P_2$ 通り

その間に残り 5 人を並べる方法は　5! 通り

よって求める場合の数は　${}_3P_2\times 5!=6\times 120=$**720（通り）**

(2)　隣り合う男子 3 人の並び方は　3! 通り

男子 3 人を 1 組と考え，この 1 組と女子 4 人を並べる方法は　5! 通り

よって求める場合の数は　$3!\times 5!=6\times 120=$**720（通り）**

(3)　女子 4 人の並べ方は　4! 通り

この 4 人の間または両端の 5 カ所に男子 3 人を並べる方法は　${}_5P_3$ 通り

よって求める場合の数は　$4!\times {}_5P_3=24\times 60=$**1440（通り）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第15講　場合の数(2)

**例題15－1**

(1)　4問のクイズに○×で答えるとき，○，×のつけ方は何通りあるか.

(2)　1，2，3の3個の数字で5桁の数字をつくる．同じ数字を重複して用いてよいとするとき，全部でいくつできるか．またそのうち奇数はいくつできるか.

(1)　4問それぞれについて，○と×の2通りのつけ方があるので

$2\times2\times2\times2=2^4=$**16（通り）**

(2)　5つの位それぞれについて，1，2，3の3つの選び方があるので

$3^5=$**243（通り）**

また，そのうち奇数となるのは，一の位が1または3の2通りのとき.

そのそれぞれについて，他の位の数字の選び方が3通り.

よって　$2\times3^4=$**162（通り）**

**類題15－1**

(1)　7種類の異なる果物がある．これらを組み合わせて最大7個の果物が入ったセットを1つ作りたい．何通りのセットができるか．ただし，最低でも1つの果物は入れることとし，同じ種類の果物を2個以上入れないものとする.

(2)　0，1，2，3，4の5種類の数字で4桁の整数を作るとき，偶数は何通りできるか．ただし，数字は重複して用いてもよいとする.

(1)　7種類の果物それぞれについて，選ぶ，選ばないの2通りの選択がある.

このうち，7種類とも選ばない場合を除いて　　$2^7-1=$**127（通り）**

(2)　千の位の数字の選び方は1，2，3，4の4通り

百，十の位の選び方は0，1，2，3，4の5通り

一の位の選び方は　0，2，4の3通り

よって　$4\times5^2\times3=$**300（通り）**

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 15 − 2**

(1)　両親と子供 4 人の 6 人が円形のテーブルに向かって座るとする．次のような座り方は何通りあるか．

(ア)　6 人全員の座り方．　(イ)　両親が隣り合わない座り方．

(2)　異なる 5 色の玉を机の上に円形に並べる方法は何通りあるか．また，これらを糸でつなげて首飾りを作るとき，何通りの首飾りができるか．

(1)　(ア)　6 人の円順列の総数より　$(6-1)!=5!=\mathbf{120}$ **(通り)**

(イ)　両親が隣り合うのは,両親を 1 組とした 5 人の円順列で,両親の座り方が 2! 通りより

$(5-1)!\times 2!=4!\times 2!=24\times 2=48$（通り）

よって両親が隣り合わないのは　$120-48=\mathbf{72}$ **(通り)**

**(別解)**　子供 4 人の円順列より　$(4-1)!=3!$（通り）

両親が隣り合わないのは，子供の間 4 カ所中 2 カ所に両親が座るときで　${}_4P_2$ 通り

よって　$3!\times {}_4P_2=6\times 12=72$（通り）

(2)　異なる 5 個のものの円順列より，円形に並べる並べ方は　$(5-1)!=4!=\mathbf{24}$ **(通り)**

また首飾りの総数は,裏返すと同じ物があることより　$\dfrac{(5-1)!}{2}=\dfrac{4!}{2}=\dfrac{24}{2}=\mathbf{12}$ **(通り)**

**類題 15 − 2**

父，母，息子 2 人，娘 2 人が円形のテーブルに向かって座るとする．

(1)　女性が隣り合わない方法は何通りあるか．

(2)　両親が向かい合う方法は何通りあるか．

(1)　男性 3 人の円順列より　2!（通り）

女性が隣り合わないのは，男性の間 3 カ所に女性が座るときで　${}_3P_3=3!$（通り）

よって　$2!\times 3!=\mathbf{12}$ **(通り)**

(2)　両親のうち一人を固定すると，もう一人はその向かい側に固定される．

よって残り 4 人の順列を考えて　$4!=\mathbf{24}$ **(通り)**

ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 15 − 3**

(1)　$a$，$a$，$a$，$a$，$b$，$b$，$b$，$c$ の8文字を1列に並べる方法は何通りあるか.

(2)　6個の数字1，1，1，2，3，4を1列に並べて6桁の整数を作るとき，次の問いに答えよ.

　(ア)　奇数は何通りできるか.

　(イ)　3が4より左側にある並べ方は何通りあるか.

(1)　$\dfrac{8!}{4!3!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4!}{4!\cdot3\cdot2\cdot1}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=$**280（通り）**

(2)　(ア)　(i)　一の位が1のとき　　残り5桁の並べ方は　$\dfrac{5!}{2!}=60$（通り）

　(ii)　一の位が3のとき　　残り5桁の並べ方は　$\dfrac{5!}{3!}=20$（通り）

　(i)，(ii)より　$60+20=$**80（通り）**

(イ)　1，1，1，2，○，○　の6個を並べ，2個の○を左から3，4とすればよい.

よって　$\dfrac{6!}{3!2!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{2\cdot1}=$**60（通り）**

**類題 15 − 3**

SAITAMAの7文字を1列に並べるとき，次の問いに答えよ.

(1)　すべての並べ方は何通りあるか.

(2)　子音が隣り合わない並べ方は何通りあるか.

(3)　S，I，Tがこの順に並ぶ並べ方は何通りあるか.

(1)　$\dfrac{7!}{3!}=7\cdot6\cdot5\cdot4=$**840（通り）**

(2)　母音A，A，A，Iの4文字を並べる方法は　$\dfrac{4!}{3!}=4$（通り）

母音の間および両端の5箇所中3箇所に子音S，T，Mを並べる方法が

$_5P_3=60$（通り）

よって　$4\times60=$**240（通り）**

(3)　○，○，○，A，A，A，Mの7文字を並べ，3個の○を左からS，I，Tとすればよい.

よって　$\dfrac{7!}{3!3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=$**140（通り）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

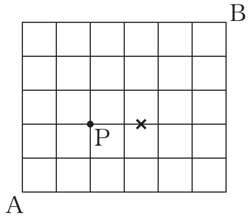
**例題 15 ー 4**

右の図のような道のある町で，A から B までの最短経路のうち，次のものの総数を求めよ．

(1)　最短経路すべて

(2)　P を通らない

(3)　P を通り，×を通らない




右に 1 区画進むことを→，上に 1 区画進むことを↑で表す．

(1)　A から B までの最短経路は，→ 6 個と↑5 個の順列で表される．

よって　$\dfrac{11!}{6!5!}=\dfrac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=$**462（通り）**

(2)　P を通る最短経路は，A→P→B

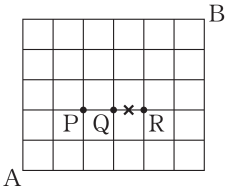
A から P の最短経路は，→ 2 個と↑2 個の順列

P から B の最短経路は，→ 4 個と↑3 個の順列

よって P を通る最短経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{7!}{4!3!}=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=210$（通り）

したがって，P を通らない最短経路は　$462-210=$**252（通り）**

(3)　P と×の両方を通る最短経路は　A→P→Q→R→B より




$\dfrac{4!}{2!2!}\times1\times1\times\dfrac{5!}{2!3!}=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=60$（通り）

よって P を通り，×を通らない最短経路は

$210-60=$**150（通り）**

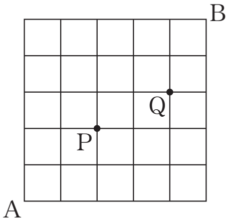
**類題 15 ー 4**

右の図のような道のある町で，A から B までの最短経路のうち，次のものの総数を求めよ．

(1)　最短経路すべて

(2)　Q を通る

(3)　P または Q を通る




右に 1 区画進むことを→，上に 1 区画進むことを↑で表す．

(1)　→ 5 個と↑5 個の順列より　$\dfrac{10!}{5!5!}=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=$**252（通り）**

(2)　A→Q→B より　$\dfrac{7!}{4!3!}\times\dfrac{3!}{1!2!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\times3=$**105（通り）**

(3)　P を通る最短経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{6!}{3!3!}=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=120$（通り）

P と Q の両方を通る最短経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{3!}{2!1!}\times\dfrac{3!}{1!2!}=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times3\times3=54$（通り）

よって P または Q を通る最短経路は　$120+105-54=$**171（通り）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 16 講　場合の数(3)

**例題 16 ー 1**

男子 6 人，女子 4 人から次のように 4 人選ぶ方法は何通りあるか.

(1)　男女問わず 4 人選ぶ.

(2)　男子 2 人，女子 2 人選ぶ.

(3)　女子を少なくとも 1 人選ぶ.

(4)　ある特定の 1 人 $a$ を含むように選ぶ.

(1)　男女合わせて 10 人から 4 人選ぶ方法で　$_{10}C_4=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=$ **210（通り）**

(2)　男子 6 人から 2 人選ぶ方法は　$_6C_2$ 通り

女子 4 人から 2 人選ぶ方法は　$_4C_2$ 通り

よって求める場合の数は　$_6C_2\times{}_4C_2=\dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\times\dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=15\times 6=$ **90（通り）**

(3)　4 人とも女子を選ぶ方法は　$_4C_4=1$（通り）

女子 3 人，男子 1 人を選ぶ方法は　$_4C_3\times{}_6C_1={}_4C_1\times{}_6C_1=4\times 6=24$（通り）

女子 2 人，男子 2 人を選ぶ方法は　$_4C_2\times{}_6C_2=\dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\times\dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=6\times 15=90$（通り）

女子 1 人，男子 3 人を選ぶ方法は　$_4C_1\times{}_6C_3=4\times\dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=4\times 20=80$（通り）

よって求める場合の数は　$1+24+90+80=$ **195（通り）**

**（別解）**　4 人とも男子を選ぶ方法は　$_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=15$（通り）

よって少なくとも 1 人の女子を選ぶ方法は　$210-15=195$（通り）

(4)　$a$ を先に選び，残り 9 人から 3 人を選ぶ方法で　$_9C_3=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=$ **84（通り）**

**類題 16 ー 1**

男女ともに 5 人の合計 10 人から 5 人を選ぶ．次のような選び方は何通りあるか.

(1)　少なくとも 1 人の男子を選ぶ.

(2)　女子を 2 人以上選ぶ.

(3)　男子 3 人，女子 2 人を選び，1 列に並べる.

(1)　男女合わせて 10 人から 5 人を選ぶ方法は　$_{10}C_5=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=252$（通り）

5 人とも女子を選ぶ方法は　$_5C_5=1$（通り）

よって，少なくとも 1 人の男子を選ぶ方法は　$252-1=$ **251（通り）**

(2)　5 人とも男子を選ぶ方法が　$_5C_5=1$（通り）

男子 4 人，女子 1 人を選ぶ方法が　$_5C_4\times{}_5C_1={}_5C_1\times{}_5C_1=5\times 5=25$（通り）

よって，少なくとも女子を 2 人選ぶ方法が　$252-(1+25)=$ **226（通り）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　男子3人，女子2人を選ぶ方法が　${}_5C_3\times{}_5C_2={}_5C_2\times{}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}\times\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=100$（通り）

選んだ5人を1列に並べる方法が　$5!=120$（通り）

よって求める場合の数は　$100\times120=$**12000（通り）**

**例題 16 － 2**

正六角形について，次の問いに答えよ．

(1)　対角線の本数を求めよ．

(2)　正六角形の頂点のうちの3個を頂点とする三角形の個数を求めよ．

(3)　(2)のうち，もとの正六角形と辺を共有しないものの個数を求めよ．

(1)　正六角形の6個の頂点から2個選ぶ方法が　${}_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$（通り）

このうち，正六角形の6本の辺を除き，求める対角線の本数は　$15-6=$**9（本）**

(2)　正六角形の6個の頂点から3個選ぶ方法で　${}_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=$**20（個）**

(3)　正六角形と2辺を共有する三角形は6個

正六角形と1辺のみを共有する三角形は，各辺につき2個，合計$2\times6=12$（個）

よって，もとの正六角形と辺を共有しない三角形の個数は　$20-(6+12)=$**2（個）**

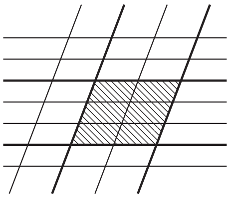
**類題 16 － 2**

(1)　7本の平行線が，4本の平行線と交わっている．これらの平行線によってできる平行四辺形は何個あるか．

(2)　正八角形の頂点のうち3つを結んでできる三角形のうち，正八角形と辺を共有しない三角形の個数を求めよ．

(1)　7本の平行線から2本，4本の平行線から2本選ぶと

平行四辺形ができる



よって求める個数は　${}_7C_2\times{}_4C_2=\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}\times\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=$**126（個）**

(2)　正八角形の8個の頂点から3個選ぶ方法が　${}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$（通り）

このうち，正八角形と2辺を共有する三角形が8個

正八角形と1辺のみを共有する三角形は，各辺につき4個，合計$4\times8=32$（個）

よって，もとの正八角形と辺を共有しない三角形の個数は　$56-(8+32)=$**16（個）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 16 − 3**

8個の異なるお菓子を次のように分ける方法は何通りあるか.

(1)　5個，2個，1個の3組に分ける.

(2)　2個ずつ4人の子供に分ける.

(3)　4個ずつ2組に分ける.

(1)　8個から5個選ぶ方法は　${}_8C_5={}_8C_3$ 通り

次に残り3個から2個選ぶ方法は　${}_3C_2={}_3C_1$ 通り

最後の1個は1通りに定まる.

したがって求める場合の数は　${}_8C_3\times{}_3C_1\times1=56\times3=$**168（通り）**

(2)　1人目の子供に分けるお菓子の選び方が　${}_8C_2$ 通り

2人目の子供に分けるお菓子の選び方が　${}_6C_2$ 通り

3人目の子供に分けるお菓子の選び方が　${}_4C_2$ 通り

4人目の子供に分けるお菓子は1通りに定まる.

したがって求める場合の数は　${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2=28\times15\times6=$**2520（通り）**

(3)　2組をA，Bとすると，A，Bに4個ずつ分ける方法は　${}_8C_4\times1$ 通り

A，Bの区別をなくすと，同じ分け方が2! 通りできる

よって求める場合の数は　$\dfrac{{}_8C_4\times1}{2!}=\dfrac{70}{2}=$**35（通り）**

**類題 16 − 3**

9人を次のように分ける方法は何通りあるか.

(1)　4人，3人，2人の3組に分ける.

(2)　3人ずつ3組に分ける.

(3)　5人，2人，2人の3組に分ける.

(1)　${}_9C_4\times{}_5C_3\times1=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=$**1260（通り）**

(2)　3組をA，B，Cとすると，A，B，Cに3人ずつ分ける方法は　${}_9C_3\times{}_6C_3\times1$ 通り

A，B，Cの区別をなくすと，同じ分け方が3! 通りできる.

よって求める場合の数は　$\dfrac{{}_9C_3\times{}_6C_3\times1}{3!}=\dfrac{1680}{6}=$**280（通り）**

(3)　9人から5人選ぶ方法が　${}_9C_5$ 通り

残り4人を2人ずつ2組に分ける方法が　$\dfrac{{}_4C_2\times1}{2!}$ 通り

よって求める場合の数は　${}_9C_5\times\dfrac{{}_4C_2\times1}{2!}=$**378（通り）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 16 ー 4**

(1)　りんご，みかん，メロンの3種類の果物から，重複を許して6個を取る組合せは何通りあるか．ただし，1つも取らない果物があってもよいとする．

(2)　桃5個を7人に分ける方法は何通りあるか．ただし，桃を2個以上もらう人や，1個ももらわない人がいてもよい．

(1)　6個の○と2個の仕切り｜の順列を求め，｜で分けられた3カ所の○の個数を，左から順にりんご，みかん，メロンの個数とすればよい．

よって求める場合の数は　$\dfrac{8!}{6!2!}={}_8\mathrm{C}_2=\dfrac{8\cdot 7}{2\cdot 1}=$**28（通り）**

(2)　5個の○と6本の仕切り｜の順列を求め，｜で分けられた7カ所の○の個数を，左から順に1人目，2人目，…，7人目がもらう桃の個数とすればよい．

よって求める場合の数は　$\dfrac{11!}{5!6!}={}_{11}\mathrm{C}_5=\dfrac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=$**462（通り）**

**類題 16 ー 4**

(1)　袋の中に赤球，青球，白球，黒球がたくさん入っている．この袋から9個の球を取り出すとき，球の取り出し方は何通りあるか．

(2)　7冊の本を3人に分けるとき，3人のもらう本の冊数を決める方法は何通りあるか．ただし本を1冊ももらわない人がいてもよい．

(1)　9個の○と3個の仕切り｜の順列を求め，｜で分けられた4カ所の○の個数を，左から順に赤球，青球，白球，黒球の個数とすればよい．

よって求める場合の数は　$\dfrac{12!}{9!3!}={}_{12}\mathrm{C}_3=$**220（通り）**

(2)　7個の○と2本の仕切り｜の順列を求め，｜で分けられた3カ所の○の個数を，左から順に1人目，2人目，3人目がもらう本の冊数とすればよい．

よって求める場合の数は　$\dfrac{9!}{7!2!}={}_9\mathrm{C}_2=$**36（通り）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第17講　確率(1)

**例題 17 − 1**

次の確率を求めよ.

(1)　2つのさいころを同時に投げるとき，目の和が5になる確率.

(2)　3つのさいころを同時に投げるとき，目の和が5になる確率.

(3)　HAKATAの6文字を1列に並べるとき，母音と子音が交互に並ぶ確率.

(1)　2つのさいころの目の出方は $6^2$ 通り

目の和が5になるのは (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) の4通り

よって求める確率は　$\dfrac{4}{6^2}=\dfrac{4}{6\cdot 6}=\mathbf{\dfrac{1}{9}}$

(2)　3つのさいころの目の出方は $6^3$ 通り

目の和が5になるのは，目の組合せが

(1, 1, 3) のとき　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）　(1, 2, 2) のとき　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）

全部で $3+3=6$ 通り

よって求める確率は　$\dfrac{6}{6^3}=\mathbf{\dfrac{1}{36}}$

(3)　3つのAを $A_1$, $A_2$, $A_3$ とする.

6文字を並べる方法は　6! 通り

母音と子音が交互に並ぶのは，(i)母子母子母子　(ii)子母子母子母　の場合がある.

(i)のとき　母音 $A_1$, $A_2$, $A_3$ の並べ方は　3! 通り

子音 H, K, T の並べ方は　3! 通り　よって　$3!\times 3!$ 通り

(ii)のとき　(i)と同様　$3!\times 3!$ 通り

したがって求める確率は　$\dfrac{3!\times 3!+3!\times 3!}{6!}=\dfrac{3!\times 3!\times 2}{6!}=\dfrac{3\cdot 2\cdot 1\times 2}{6\cdot 5\cdot 4}=\mathbf{\dfrac{1}{10}}$

**類題 17 − 1**

(1)　3つのさいころを同時に投げるとき，目の和が6になる確率を求めよ.

(2)　SAPPOROの7文字を1列に並べるとき，母音と子音が交互に並ぶ確率を求めよ.

(1)　3つのさいころの目の出方は $6^3$ 通り

目の和が6になるのは，目の組合せが

(1, 1, 4) のとき　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）　(1, 2, 3) のとき　$3!=6$（通り）

(2, 2, 2) のとき　1通り

全部で $3+6+1=10$ 通り

よって求める確率は　$\dfrac{10}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{108}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　2 つの P を $P_1$，$P_2$，2 つの O を $O_1$，$O_2$ とする．
7 文字を並べる方法は　7! 通り
母音と子音が交互に並ぶのは，子母子母子母子　の場合のみ．
母音 A，$O_1$，$O_2$ の並べ方は　3! 通り
子音 S，$P_1$，$P_2$，R の並べ方は　4! 通り　　　　よって　3!×4! 通り
したがって求める確率は　$\dfrac{3!\times4!}{7!}=\dfrac{3\cdot2\cdot1}{7\cdot6\cdot5}=\mathbf{\dfrac{1}{35}}$

**例題 17 ー 2**
(1)　赤球 5 個，白球 3 個が入った袋の中から 3 個の球をとり出すとき，赤球 2 個，白球 1 個が出る確率を求めよ．
(2)　3 人で 1 回じゃんけんをするとき，次の確率を求めよ．
(ア)　1 人だけが勝つ確率.　　　　　(イ)　あいこになる確率.

(1)　8 個から 3 個取り出す組合せは　${}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=8\cdot7$（通り）
このうち，赤球 2 個，白球 1 個を取り出す組合せは
${}_5C_2\times{}_3C_1=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}\times3=5\cdot2\cdot3$（通り）
よって求める確率は　$\dfrac{{}_5C_2\times{}_3C_1}{{}_8C_3}=\dfrac{5\cdot2\cdot3}{8\cdot7}=\mathbf{\dfrac{15}{28}}$
(2)　3 人の手の出し方は全部で $3^3$ 通り
(ア)　1 人だけが勝つとき，その勝者の決まり方は　${}_3C_1$ 通り
勝者の手の出し方は　グー，チョキ，パーの 3 通り
よって求める確率は　$\dfrac{{}_3C_1\times3}{3^3}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$
(イ)　2 人が勝つとき，その勝者の決まり方は　${}_3C_2$ 通り
勝者の手の出し方は　グー，チョキ，パーの 3 通り
よって 2 人が勝つ確率は　$\dfrac{{}_3C_2\times3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$
したがってあいこになる確率は　$1-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\right)=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 17 ー 2**

(1)　10 本中 3 本が当たりのくじがある．このくじから同時に 3 本引くとき，1 本だけ当たる確率を求めよ．

(2)　A，B，C，D の 4 人で 1 回じゃんけんをするとき，次の確率を求めよ．

(ア)　A だけが負ける確率.　　(イ)　あいこになる確率.

(1)　10 本中 3 本引く組合せは　${}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=10\cdot3\cdot4$（通り）

このうち，1 本だけ当たりくじを引くのは，当たりくじ 3 本から 1 本，はずれくじ 7 本から 2 本引く場合で　${}_3C_1\times{}_7C_2=3\times\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}=3\cdot7\cdot3$（通り）

よって求める確率は　$\dfrac{{}_3C_1\times{}_7C_2}{{}_{10}C_3}=\dfrac{3\cdot7\cdot3}{10\cdot3\cdot4}=\mathbf{\dfrac{21}{40}}$

(2)　4 人の手の出し方は全部で $3^4$ 通り

(ア)　A だけが負けるとき，その手の出し方はグー，チョキ，パーの 3 通り

よって求める確率は　$\dfrac{3}{3^4}=\mathbf{\dfrac{1}{27}}$

(イ)　3 人が勝つとき，勝者の決まり方および手の出し方を考えて

その確率は　$\dfrac{{}_4C_3\times3}{3^4}=\dfrac{4\times3}{3^4}=\dfrac{4}{27}$

2 人だけが勝つ確率は　$\dfrac{{}_4C_2\times3}{3^4}=\dfrac{6\times3}{3^4}=\dfrac{2}{9}=\dfrac{6}{27}$

1 人だけが勝つ確率は　$\dfrac{{}_4C_1\times3}{3^4}=\dfrac{4\times3}{3^4}=\dfrac{4}{27}$

よってあいこになる確率は　$1-\left(\dfrac{4}{27}+\dfrac{6}{27}+\dfrac{4}{27}\right)=\mathbf{\dfrac{13}{27}}$

**例題 17 ー 3**

[1]のカードが 5 枚，[2]のカードが 4 枚，[3]のカードが 3 枚，合計 12 枚のカードがある．この中から同時に 3 枚のカードを取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1)　3 枚のカードの数がすべて同じである確率.

(2)　3 枚中 2 枚のみ同じ数のカードである確率.

12 枚のカードから 3 枚を取り出す場合の数は　${}_{12}C_3=\dfrac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=2\cdot11\cdot10$（通り）

(1)　3 枚のカードの数がすべて同じなのは

(i)　3 枚とも[1]　　(ii)　3 枚とも[2]　　(iii)　3 枚とも[3]

のときであり，(i)，(ii)，(iii)は互いに排反である．

よって求める確率は　$\dfrac{{}_5C_3}{{}_{12}C_3}+\dfrac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3}+\dfrac{{}_3C_3}{{}_{12}C_3}=\dfrac{10+4+1}{2\cdot11\cdot10}=\dfrac{15}{2\cdot11\cdot10}=\mathbf{\dfrac{3}{44}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　3枚のカードの数がすべて異なるのは，1，2，3のカードを1枚ずつ取り出すとき．

その確率は　$\dfrac{{}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_{12}C_3}=\dfrac{5\times4\times3}{2\cdot11\cdot10}=\dfrac{3}{11}=\dfrac{12}{44}$

「3枚中2枚のみ同じ数」という事象は「3枚のカードの数がすべて同じ または すべて異なる」という事象の余事象である．

よって求める確率は　$1-\left(\dfrac{3}{44}+\dfrac{12}{44}\right)=\boldsymbol{\dfrac{29}{44}}$

**類題17－3**

白球6個，黒球4個，赤球3個，青球1個が1つの袋の中に入っている．この袋の中から同時に3個の球を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1)　3個の球の色がすべて同じ確率．

(2)　赤球が少なくとも1つ含まれる確率．

14個の球から3個を取り出す場合の数は　${}_{14}C_3=\dfrac{14\cdot13\cdot12}{3\cdot2\cdot1}=7\cdot13\cdot4$（通り）

(1)　3個の球の色がすべて同じになるのは，

(i)　3個とも白　　(ii)　3個とも黒　　(iii)　3個とも赤

のときであり，(i)，(ii)，(iii)は互いに排反である．

よって求める確率は　$\dfrac{{}_6C_3}{{}_{14}C_3}+\dfrac{{}_4C_3}{{}_{14}C_3}+\dfrac{{}_3C_3}{{}_{14}C_3}=\dfrac{20+4+1}{7\cdot13\cdot4}=\dfrac{25}{7\cdot13\cdot4}=\boldsymbol{\dfrac{25}{364}}$

(2)「赤球が少なくとも1つ含まれる」という事象は，「赤球が1つも含まれない」という事象の余事象である．

赤球が1つも含まれないのは，赤球3個を除く残り11個から3個取り出したときで

その確率は　$\dfrac{{}_{11}C_3}{{}_{14}C_3}=\dfrac{11\cdot5\cdot3}{7\cdot13\cdot4}=\dfrac{165}{364}$

よって求める確率は　$1-\dfrac{165}{364}=\boldsymbol{\dfrac{199}{364}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 17 ー 4**

(1)　A の袋には白球 6 個，黒球 4 個，B の袋には白球 7 個，黒球 3 個が入っている．A の袋から 3 個，B の袋から 2 個の球を取り出すとき，全部黒球である確率を求めよ．

(2)　さいころを 2 回投げるとき，次の確率を求めよ．

(ア)　1 回目は 2 の倍数の目，2 回目は 3 以上の目が出る確率．

(イ)　少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率．

(1)　A の袋から黒球 3 個を取り出す確率は　$\dfrac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3}=\dfrac{4}{10\cdot3\cdot4}=\dfrac{1}{30}$

B の袋から黒球 2 個を取り出す確率は　$\dfrac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{3}{5\cdot9}=\dfrac{1}{15}$

A の袋から球を取り出す試行と B の袋から球を取り出す試行は独立であるから，

求める確率は　$\dfrac{1}{30}\times\dfrac{1}{15}=\boldsymbol{\dfrac{1}{450}}$

(2)　さいころを 2 回投げるとき，2 回の試行は独立である．

(ア)　1 回目に 2 の倍数の目が出る確率は　$\dfrac{3}{6}$

2 回目に 3 以上の目が出る確率は　$\dfrac{4}{6}$

よって求める確率は　$\dfrac{3}{6}\times\dfrac{4}{6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(イ)　2 回とも 1 の目が出ない確率は　$\left(\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{25}{36}$

よって求める確率は　$1-\dfrac{25}{36}=\boldsymbol{\dfrac{11}{36}}$

**類題 17 ー 4**

(1)　A の袋には赤球 7 個，青球 4 個，B の袋には赤球 6 個，青球 5 個が入っている．A，B の袋から 1 個ずつ球を取り出すとき，球の色が異なる確率を求めよ．

(2)　さいころを 3 回投げるとき，次の確率を求めよ．

(ア)　出た目が順に 1，2，3 である確率．

(イ)　少なくとも 1 回は 3 の倍数の目が出る確率．

(1)　取り出した球の色が異なるのは

(i)　A から赤，B から青　　　(ii)　A から青，B から赤

のいずれか．

(i)の確率は　$\dfrac{{}_7C_1}{{}_{11}C_1}\times\dfrac{{}_5C_1}{{}_{11}C_1}=\dfrac{35}{121}$　　(ii)の確率は　$\dfrac{{}_4C_1}{{}_{11}C_1}\times\dfrac{{}_6C_1}{{}_{11}C_1}=\dfrac{24}{121}$

よって求める確率は　$\dfrac{35}{121}+\dfrac{24}{121}=\boldsymbol{\dfrac{59}{121}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　(ア)　求める確率は　$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{216}$

(イ)　3 回とも 3 の倍数の目が出ない確率は　$\left(\dfrac{4}{6}\right)^3=\dfrac{8}{27}$

よって求める確率は　$1-\dfrac{8}{27}=\mathbf{\dfrac{19}{27}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第18講　確率(2)

**例題18－1**
1個のさいころを5回投げるとき，次の問いに答えよ．
(1)　3の倍数の目がちょうど3回出る確率を求めよ．
(2)　3の倍数の目が3回以上出る確率を求めよ．

(1)　1回の試行で3の倍数の目が出る確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

よって求める確率は　${}_5C_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=10\times\dfrac{2^2}{3^5}=\mathbf{\dfrac{40}{243}}$

(2)　3の倍数の目が4回出る確率は　${}_5C_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^1=5\times\dfrac{2}{3^5}=\dfrac{10}{243}$

3の倍数の目が5回出る確率は　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^5=\dfrac{1}{243}$

よって3の倍数の目が3回以上出る確率は　$\dfrac{40}{243}+\dfrac{10}{243}+\dfrac{1}{243}=\dfrac{51}{243}=\mathbf{\dfrac{17}{81}}$

**類題18－1**
1個のさいころを4回投げるとき，次の確率を求めよ．
(1)　5以上の目がちょうど2回出る確率．
(2)　4回目に2度目の5の目が出る確率．

(1)　1回の試行で5以上の目が出る確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

よって求める確率は　${}_4C_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=6\times\dfrac{2^2}{3^4}=\mathbf{\dfrac{8}{27}}$

(2)　4回目に2度目の5の目が出るのは，3回目までに5がちょうど1回出て，4回目に2度目の5が出るときである．

よって求める確率は　${}_3C_1\left(\dfrac{1}{6}\right)^1\left(\dfrac{5}{6}\right)^2\times\dfrac{1}{6}=3\times\dfrac{5^2}{6^4}=\mathbf{\dfrac{25}{432}}$

**例題18－2**
数直線上を動く点Pが原点にある．1枚の硬貨を投げて，表が出たら正の方向に3，裏が出たら負の方向に2進む．コインを5回投げるとき，点Pが原点に戻っている確率を求めよ．

硬貨を1回投げて，表が出る確率，裏が出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$ である．

5回のうち，表が $x$ 回出るとすると，点Pの座標は　$3x+(-2)\cdot(5-x)=5x-10$

点Pが原点に戻っているとき　$5x-10=0$　より　$x=2$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

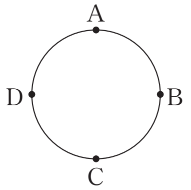
よって求める確率は，5回のうち表が2回，裏が3回出る確率である．

したがって　${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=10\times\frac{1}{2^5}=\boldsymbol{\frac{5}{16}}$

**類題 18 － 2**

(1)　数直線上を動く点Pが原点の位置にある．1個のさいころを投げて4以下の目が出たら正の向きに2，5以上の目が出たら負の向きに1だけ進む．さいころを4回投げたとき，点Pが座標2のところにいる確率を求めよ．

(2)　右図において，点PはAを出発点として確率 $\frac{2}{3}$ で右回りに1つ次の点に移り，確率 $\frac{1}{3}$ で左回りに1つ次の点に移る．3回の移動で，点Pが点Bにいる確率を求めよ．




(1)　1個のさいころを投げて，4以下の目が出る確率は $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，

5以上の目が出る確率は　$\frac{1}{3}$

さいころを4回投げて4以下の目が出る回数を $x$ とすると

$2x+(-1)(4-x)=2$　より　$x=2$

よって求める確率は　${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\boldsymbol{\frac{8}{27}}$

(2)　右向きを正の方向，左向きを負の方向とすると，$\frac{2}{3}$ の確率で1，$\frac{1}{3}$ の確率で $-1$ 進むと考えられる．正の方向に $x$ 回進むとすると，3回の移動における点Pの移動は

$1\cdot x+(-1)\cdot(3-x)=2x-3$　と表される．

この移動で点Pが点Bにいるのは

(i)　$2x-3=1$

(ii)　$2x-3=-3$

のとき．

(i)のとき　$x=2$　より　その確率は　${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=3\times\frac{4}{3^3}=\frac{4}{9}$

(ii)のとき　$x=0$　より　その確率は　$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

以上より求める確率は　$\frac{4}{9}+\frac{1}{27}=\boldsymbol{\frac{13}{27}}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 18 － 3**

(1)　男子 64 人，女子 36 人のうち，徒歩で通学している人が男子 25 人，女子 15 人であった．この男女 100 人の中から選ばれた 1 人が男子のとき，その人が徒歩で通学している確率を求めよ．

(2)　白球 5 個と赤球 3 個が入った袋から球を 1 個取り出し，それをもとに戻さずもう 1 個取り出す．1 回目に白球が出たとき，2 回目に赤球が出る確率を求めよ．

(1)　右表より求める確率は　$\mathbf{\frac{25}{64}}$

| | 男子 | 女子 | 合計 |
|---|---|---|---|
| 徒歩 | 25 | 15 | 40 |
| 徒歩でない | 39 | 21 | 60 |
| 合計 | 64 | 36 | 100 |

**(別解)**

選ばれた人が男子であるという事象を $A$，徒歩で通学しているという事象を $B$ とすると，求める確率は　$P_A(B)$ である．

$P(A)=\frac{64}{100}$，$P(A\cap B)=\frac{25}{100}$

よって求める確率は　$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{25}{100}\times\frac{100}{64}=\frac{25}{64}$

(2)　1 回目に白球を取り出すという事象を $A$，2 回目に赤球を取り出すという事象を $B$ とすると，求める確率は　$P_A(B)$ である．

1 回目に白球が出たとき，残りの球は白球 4 個，赤球 3 個の 7 個である．2 回目にこの中から赤球を取り出す確率が求める確率である．したがって　$P_A(B)=\mathbf{\frac{3}{7}}$

**(別解)**　1 回目に白球を取り出す確率は　$P(A)=\frac{5}{8}$

1 回目に白球，2 回目に赤球を取り出す確率は　$P(A\cap B)=\frac{{}_5C_1\times{}_3C_1}{{}_8P_2}=\frac{15}{56}$

よって　$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{15}{56}\times\frac{8}{5}=\frac{3}{7}$

**類題 18 － 3**

(1)　男子46人，女子54人があるクイズを行ったところ，男子の正解者は 30人，女子の正解者は 36人であった．この男女 100 人の中から選ばれた 1 人が不正解者であるとき，その人が女子である確率を求めよ．

(2)　白球 7 個と赤球 2 個が入った袋から球を 1 個取り出し，それをもとに戻さずもう 1 個取り出す．1 回目に白球が出たとき，2 回目も白球が出る確率を求めよ．

(1)　不正解者は $100-(30+36)=34$（人），女子の不正解者は $54-36=18$（人）である．

よって求める確率は　$\frac{18}{34}=\mathbf{\frac{9}{17}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

⑵　1回目に白球を取り出すという事象を $A$，2回目に白球を取り出すという事象を $B$ とすると，求める確率は　$P_A(B)$ である．

1回目に白球が出たとき，残りの球は白球6個，赤球2個の8個である．2回目にこの中から白球を取り出す確率が求める確率である．したがって　$P_A(B)=\frac{6}{8}=\mathbf{\frac{3}{4}}$

**例題 18 － 4**

⑴　10本のくじのうち，4本が当たりくじである．このくじをA，Bが順に1本ずつ引くとき，次の問いに答えよ．ただし，一度引いたくじはもとに戻さない．

㋐　A，Bともに当たる確率．　　㋑　Bが当たる確率．

⑵　赤球6個と白球3個が入った袋Aと，赤球3個と白球4個が入った袋Bがある．袋Aから1球取り出し，それを袋Bに入れた後に袋Bから2球同時に取り出すとき，2球とも赤球である確率を求めよ．

⑴　Aが当たるという事象を $A$，Bが当たるという事象を $B$ とする．

㋐　$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，$P_A(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ より　$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{15}}$

㋑　$P(\overline{A})=\frac{3}{5}$，$P_{\overline{A}}(B)=\frac{4}{9}$ より　$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$

よって求める確率は　$P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{6}{15}=\mathbf{\frac{2}{5}}$

⑵　袋Aから赤球を取り出すときと白球を取り出すときに分けられ，これらは排反である．

よって求める確率は　$\frac{6}{9}\times\frac{{}_4C_2}{{}_8C_2}+\frac{3}{9}\times\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{14}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{28}=\frac{1}{7}+\frac{1}{28}=\mathbf{\frac{5}{28}}$

**類題 18 － 4**

⑴　1から20までの数字が書かれた20枚のカードから，もとに戻さずに1枚ずつ2枚引くとき，2枚目が3の倍数である確率を求めよ．

⑵　赤球3個と白球2個が入った袋Aと，赤球2個と白球2個が入った袋Bがある．袋Aから1球取り出し，それを袋Bに入れた後に袋Bから球を1球取り出すとき，それが白球である確率を求めよ．

⑴　1回目に3の倍数を引くときと3の倍数以外の数を引くときに分けられ，これらは排反である．よって求める確率は　$\frac{6}{20}\times\frac{5}{19}+\frac{14}{20}\times\frac{6}{19}=\frac{30+84}{20\cdot 19}=\frac{114}{20\cdot 19}=\mathbf{\frac{3}{10}}$

⑵　袋Aから赤球を取り出すときと白球を取り出すときに分けられ，これらは排反である．

よって求める確率は　$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\mathbf{\frac{12}{25}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第19講　図形と方程式(1)

**例題19－1**

2点 A$(-3,\ 2)$，B$(4,\ 5)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　線分 AB の長さを求めよ．

(2)　線分 AB を 2：1 に内分する点 C の座標を求めよ．

(3)　線分 AB を 3：1 に外分する点 D の座標を求めよ．

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{\{4-(-3)\}^2+(5-2)^2}=\sqrt{7^2+3^2}=\boldsymbol{\sqrt{58}}$

(2)　C の座標は　$\left(\dfrac{1\cdot(-3)+2\cdot4}{2+1},\ \dfrac{1\cdot2+2\cdot5}{2+1}\right)=\boldsymbol{\left(\dfrac{5}{3},\ 4\right)}$

(3)　D の座標は　$\left(\dfrac{(-1)\cdot(-3)+3\cdot4}{3-1},\ \dfrac{(-1)\cdot2+3\cdot5}{3-1}\right)=\boldsymbol{\left(\dfrac{15}{2},\ \dfrac{13}{2}\right)}$

**類題19－1**

3点 A$(-1,\ 2)$，B$(4,\ 5)$，C$(6,\ -1)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　線分 BC の中点 M の座標を求めよ．

(2)　△ABC の重心 G の座標を求めよ．

(3)　線分 AB を 1：3 に外分する点 D の座標を求めよ．

(1)　M の座標は　$\left(\dfrac{1\cdot4+1\cdot6}{1+1},\ \dfrac{1\cdot5+1\cdot(-1)}{1+1}\right)=\boldsymbol{(5,\ 2)}$

(2)　重心 G は線分 AM を 2：1 に内分する点である．

　　よって G の座標は　$\left(\dfrac{1\cdot(-1)+2\cdot5}{2+1},\ \dfrac{1\cdot2+2\cdot2}{2+1}\right)=\boldsymbol{(3,\ 2)}$

(3)　D の座標は　$\left(\dfrac{3\cdot(-1)+(-1)\cdot4}{-1+3},\ \dfrac{3\cdot2+(-1)\cdot5}{-1+3}\right)=\boldsymbol{\left(-\dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 19－2**

次の直線の方程式を求めよ.

(1)　点 $(2,\ 3)$ を通り，傾きが $4$ の直線

(2)　2 点 $(-1,\ 2)$，$(2,\ 8)$ を通る直線

(3)　点 $(3,\ 5)$ を通り，$x$ 軸に垂直な直線

(1)　$y=4(x-2)+3=4x-5$　　よって　$\boldsymbol{y=4x-5}$

(2)　求める直線の傾きは　$\dfrac{8-2}{2-(-1)}=2$

よって　$y=2(x+1)+2=2x+4$　より　$\boldsymbol{y=2x+4}$

(3)　$\boldsymbol{x=3}$

**類題 19－2**

次の直線の方程式を求めよ.

(1)　点 $(5,\ -3)$ を通り，傾きが $-2$ の直線

(2)　2 点 $(-4,\ 3)$，$(6,\ -3)$ を通る直線

(3)　点 $(1,\ 2)$ を通り，$x$ 軸に平行な直線

(1)　$y=-2(x-5)-3=-2x+7$　　よって　$\boldsymbol{y=-2x+7}$

(2)　求める直線の傾きは　$\dfrac{-3-3}{6-(-4)}=-\dfrac{3}{5}$

よって　$y=-\dfrac{3}{5}(x+4)+3=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{3}{5}$　より　$\boldsymbol{y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{3}{5}}$

(3)　$\boldsymbol{y=2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 19 − 3**
次の直線の方程式を求めよ.
(1)　点 $(1,\ 3)$ を通り，直線 $5x-2y-1=0$ に平行な直線
(2)　点 $(-2,\ 1)$ を通り，直線 $3x-y-12=0$ に垂直な直線

(1)　直線 $5x-2y-1=0$ の傾きは $\dfrac{5}{2}$　　よって求める直線の傾きは $\dfrac{5}{2}$

したがって　$y=\dfrac{5}{2}(x-1)+3=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{1}{2}$　　つまり　$\boldsymbol{5x-2y+1=0}$

(2)　直線 $3x-y-12=0$ の傾きは　3　　よって求める直線の傾きは $-\dfrac{1}{3}$

したがって　$y=-\dfrac{1}{3}(x+2)+1=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$　　つまり　$\boldsymbol{x+3y-1=0}$

**類題 19 − 3**
次の直線の方程式を求めよ.
(1)　点 $(-2,\ 5)$ を通り，直線 $3x+5y+1=0$ に平行な直線
(2)　点 $(2,\ 1)$ を通り，直線 $3x+4y+5=0$ に垂直な直線

(1)　直線 $3x+5y+1=0$ の傾きは $-\dfrac{3}{5}$　　よって求める直線の傾きは $-\dfrac{3}{5}$

したがって　$y=-\dfrac{3}{5}(x+2)+5=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{19}{5}$　　つまり　$\boldsymbol{3x+5y-19=0}$

(2)　直線 $3x+4y+5=0$ の傾きは $-\dfrac{3}{4}$　　よって求める直線の傾きは $\dfrac{4}{3}$

したがって　$y=\dfrac{4}{3}(x-2)+1=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}$　　つまり　$\boldsymbol{4x-3y-5=0}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 19 ー 4**

(1)　点 $(1,\ 2)$ と直線 $3x-2y+4=0$ の距離を求めよ．

(2)　点 $(-1,\ 2)$ と直線 $y=3x+1$ の距離を求めよ．

(1)　求める距離は　$\dfrac{|3\cdot1-2\cdot2+4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{|3|}{\sqrt{13}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{13}}}$

(2)　点 $(-1,\ 2)$ と直線 $3x-y+1=0$ の距離は　$\dfrac{|3\cdot(-1)-1\cdot2+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-4|}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\dfrac{4}{\sqrt{10}}}$

**類題 19 ー 4**

(1)　点 $(3,\ 7)$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ の距離を求めよ．

(2)　3直線 $x-3y=-5$　……①，$4x+3y=-5$　……②，$2x-y=5$　……③　について，直線①と②，直線②と③，直線③と①の交点をそれぞれ A，B，C とする．次のものを求めよ．

(ア)　交点 A，B，C の座標　　(イ)　点 A と直線 BC の距離

(ウ)　△ABC の面積

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ より　$x-2y+1=0$

求める距離は　$\dfrac{|1\cdot3-2\cdot7+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{5}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$

(2)　(ア)　①と②を連立して　**A(−2，1)**

②と③を連立して　**B(1，−3)**

③と①を連立して　**C(4，3)**

(イ)　点 A と直線 BC，つまり直線③との距離 $d$ は

$$d=\frac{|2\cdot(-2)-1\cdot1-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$$

(ウ)　$\mathrm{BC}=\sqrt{(1-4)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}=\boldsymbol{15}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 20 講　図形と方程式(2)

**例題 20 － 1**

(1)　次の円の方程式を求めよ．

　(ア)　中心が $(3,\ -1)$，半径が 5　　(イ)　原点が中心，点 $(2,\ 3)$ を通る

(2)　方程式 $x^2+y^2-6x+10y+16=0$ はどのような図形を表すか．

(1)　(ア)　求める円の方程式は　$(x-3)^2+(y+1)^2=5^2$　　つまり　$\boldsymbol{(x-3)^2+(y+1)^2=25}$

　(イ)　求める円の半径 $r$ は，中心 $(0,\ 0)$ と 点 $(2,\ 3)$ の距離．

　よって　$r=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

　したがって，求める円の方程式は　$x^2+y^2=(\sqrt{13})^2$　つまり　$\boldsymbol{x^2+y^2=13}$

(2)　$x^2+y^2-6x+10y+16=0$　より　$(x-3)^2-9+(y+5)^2-25+16=0$

　$(x-3)^2+(y+5)^2=18=(3\sqrt{2})^2$　　よって　**中心 $(3,\ -5)$，半径 $3\sqrt{2}$ の円**　を表す．

**類題 20 － 1**

(1)　次の円の方程式を求めよ．

　(ア)　点 $(3,\ -1)$ を中心とし，$x$ 軸に接する

　(イ)　2 点 $(-6,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を直径の両端とする

(2)　方程式 $x^2+y^2+5x-3y+6=0$　はどのような図形を表すか．

(3)　方程式 $x^2+2x+y^2+k=0$ が円を表すとき，定数 $k$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(1)　(ア)　求める円は $x$ 軸に接するので，中心 $(3,\ -1)$ と $x$ 軸との距離 1 が半径である．

　よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{(x-3)^2+(y+1)^2=1}$

　(イ)　中心は 2 点 $(-6,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を結ぶ線分の中点である．

　その座標は　$\left(\dfrac{-6+4}{2},\ \dfrac{2-2}{2}\right)=(-1,\ 0)$

　半径 $r$ は　$(-1,\ 0)$ と点 $(4,\ -2)$ の距離で　$r=\sqrt{5^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$

　したがって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{(x+1)^2+y^2=29}$

(2)　$x^2+y^2+5x-3y+6=0$　より　$\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+6=0$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$$

　よって　**中心 $\left(-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ の円**　を表す．

(3)　$x^2+2x+y^2+k=0$　より　$(x+1)^2+y^2=1-k$

　よって，この方程式が円を表すのは　$1-k>0$　つまり　$\boldsymbol{k<1}$　のとき

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 20 ー 2**

(1)　円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=-x+1$ の共有点の座標を求めよ.

(2)　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ について，次の条件を満たすような $k$ の値および値の範囲を求めよ.

(ア)　異なる 2 点で交わる　　(イ)　1 点で接する　　(ウ)　共有点をもたない

(1)　$x^2+y^2=5$ ……①　　$y=-x+1$ ……②

②を①に代入して　$x^2+(-x+1)^2=5$　　$x^2-x-2=0$　　$(x-2)(x+1)=0$

よって　$x=-1,\ 2$

したがって，共有点の座標は　**$(-1,\ 2)$，$(2,\ -1)$**

(2)　$x^2+y^2=1$ ……①　$y=x+k$ ……②

②を①に代入して　$x^2+(x+k)^2=1$　　$2x^2+2kx+(k^2-1)=0$

この 2 次方程式の判別式を $D$ とすると　$\dfrac{D}{4}=k^2-2(k^2-1)=-k^2+2$

(ア)　異なる 2 点で交わるのは　$D>0$ のとき

よって　$-k^2+2>0$　より　$k^2<2$　　したがって　$\boldsymbol{-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}}$

(イ)　1 点で接するのは　$D=0$ のとき

よって　$-k^2+2=0$　より　$k^2=2$　　したがって　$\boldsymbol{k=\pm\sqrt{2}}$

(ウ)　共有点をもたないのは　$D<0$ のとき

よって　$-k^2+2<0$　より　$k^2>2$　　したがって　$\boldsymbol{k<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<k}$

**(別解)**　円 $x^2+y^2=1$ の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $y=x+k$　つまり　$x-y+k=0$ の距離 $d$ は

$$d=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$　　また，円の半径は 1

(ア)　異なる 2 点で交わるのは　$d<1$ のとき

よって　$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}<1$　より　$|k|<\sqrt{2}$　　したがって　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

(イ)　1 点で接するのは　$d=1$　のとき

よって　$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}=1$　より　$|k|=\sqrt{2}$　　したがって　$k=\pm\sqrt{2}$

(ウ)　共有点をもたないのは　$d>1$ のとき

よって　$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}>1$　より　$|k|>\sqrt{2}$　　したがって　$k<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<k$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 20 ー 2**

(1)　円 $x^2+y^2=2$ と直線 $2x-y+3=0$ の共有点の座標を求めよ.

(2)　円 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ と直線 $y=x+m$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 $m$ のとりうる値の範囲を求めよ.

(1)　$x^2+y^2=2$　……①　　$2x-y+3=0$　……②

②より　$y=2x+3$　これを①に代入して

$x^2+(2x+3)^2=2$　　$5x^2+12x+7=0$　　$(5x+7)(x+1)=0$

よって　$x=-1,\ -\dfrac{7}{5}$

したがって，求める共有点の座標は　$\boldsymbol{(-1,\ 1),\ \left(-\dfrac{7}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)}$

(2)　$(x+2)^2+(y-1)^2=5$　……①　　$y=x+m$　……②

②を①に代入して　$(x+2)^2+(x+m-1)^2=5$　　$2x^2+2(m+1)x+m^2-2m=0$

この 2 次方程式の判別式を $D$ とすると　$\dfrac{D}{4}=(m+1)^2-2(m^2-2m)=-m^2+6m+1$

円と直線が異なる 2 点で交わるのは　$D>0$ のとき

よって　$-m^2+6m+1>0$　　$m^2-6m-1<0$　　したがって　$\boldsymbol{3-\sqrt{10}<m<3+\sqrt{10}}$

**(別解)**　円①の中心 $(-2,\ 1)$ と直線②　つまり　$x-y+m=0$ の距離を $d$ とすると

$d=\dfrac{|-2-1+m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|m-3|}{\sqrt{2}}$　　また円①の半径は　$\sqrt{5}$

円と直線が異なる 2 点で交わるのは　$d<\sqrt{5}$　のとき

つまり　$\dfrac{|m-3|}{\sqrt{2}}<\sqrt{5}$　　$|m-3|<\sqrt{10}$　　$-\sqrt{10}<m-3<\sqrt{10}$

したがって　$3-\sqrt{10}<m<3+\sqrt{10}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 20 − 3**

(1)　円 $x^2+y^2=25$ 上の点 (3, 4) における接線の方程式を求めよ.

(2)　点 (2, −1) から円 $x^2+y^2=4$ に引いた接線の方程式を求めよ.

(1)　公式より　$\boldsymbol{3x+4y=25}$

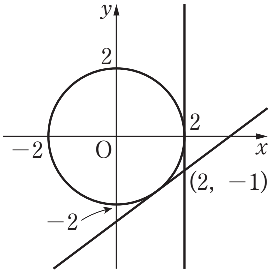
(2)　点 (2, −1) を通り, $x$ 軸に垂直な直線 $x=2$ は,

円 $x^2+y^2=4$ の接線である.

点 (2, −1) を通るもう 1 本の接線は　$y=m(x-2)-1$　……①

つまり　$mx-y-2m-1=0$　とおける.

この直線と円の中心 (0, 0) との距離が半径 2 と等しければよい.




よって　$\dfrac{|-2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$　　$|2m+1|=2\sqrt{m^2+1}$

両辺を 2 乗して　$(2m+1)^2=4(m^2+1)$　　$4m=3$　　よって　$m=\dfrac{3}{4}$

①より　$y=\dfrac{3}{4}(x-2)-1$　　つまり　$3x-4y-10=0$

以上より求める接線の方程式は　$\boldsymbol{x=2,\ 3x-4y-10=0}$

**類題 20 − 3**

(1)　円 $x^2+y^2=20$ 上の点 (−2, −4) における接線の方程式を求めよ.

(2)　点 (1, 5) から $x^2+y^2=13$ に引いた接線の方程式を求めよ.

(1)　公式より　$-2x-4y=20$　　よって　$\boldsymbol{x+2y+10=0}$

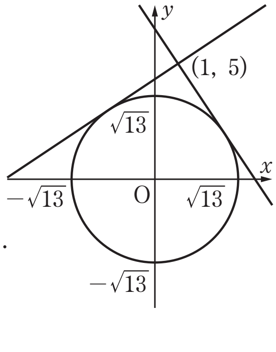
(2)　点 (1, 5) を通り $x$ 軸と垂直な直線 $x=1$ は

円 $x^2+y^2=13$ の接線ではない.

よって, 求める接線を　$y=m(x-1)+5$　……①

つまり　$mx-y-m+5=0$　とおける.

この直線と円の中心 (0, 0) との距離が半径 $\sqrt{13}$ と等しければよい.




よって　$\dfrac{|-m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{13}$　　$|m-5|=\sqrt{13}\sqrt{m^2+1}$

両辺を 2 乗して　$(m-5)^2=13(m^2+1)$　　$6m^2+5m-6=0$　　$(3m-2)(2m+3)=0$

よって　$m=\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{3}{2}$

$m=\dfrac{2}{3}$ のとき　①より　$y=\dfrac{2}{3}(x-1)+5$　つまり　$2x-3y+13=0$

$m=-\dfrac{3}{2}$ のとき　①より　$y=-\dfrac{3}{2}(x-1)+5$　つまり　$3x+2y-13=0$

したがって, 求める接線の方程式は　$\boldsymbol{2x-3y+13=0,\ 3x+2y-13=0}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 20 ー 4**

2 円 $x^2+y^2=10$，$x^2+y^2-2x+6y+2=0$ について，次の問いに答えよ．

(1)　2 円の共有点の座標を求めよ．

(2)　2 円の共有点を通る直線の式を求めよ．

(3)　2 円の共有点と原点を通る円の中心の座標と半径を求めよ．

(1)　$x^2+y^2=10$　……①　　$x^2+y^2-2x+6y+2=0$　……②

②－①より　$-2x+6y+2=-10$　つまり　$x=3y+6$　……③

これを①に代入して　$(3y+6)^2+y^2=10$　　$5y^2+18y+13=0$

よって　$y=-\frac{13}{5},\ -1$

このとき③よりそれぞれ $x=-\frac{9}{5},\ 3$

したがって，求める共有点の座標は　$\boldsymbol{\left(-\frac{9}{5},\ -\frac{13}{5}\right),\ (3,\ -1)}$

(2)　(1)の 2 点を通る直線の傾きは　$\dfrac{-1-\left(-\frac{13}{5}\right)}{3-\left(-\frac{9}{5}\right)}=\dfrac{-5+13}{15+9}=\dfrac{1}{3}$

よって，求める直線の方程式は　$y=\frac{1}{3}(x-3)-1$　　つまり　$\boldsymbol{x-3y-6=0}$

**(別解)**　2 円の共有点を通る図形は

$x^2+y^2-2x+6y+2+k(x^2+y^2-10)=0$　……④　と表される．

これが直線を表すのは　$k=-1$ のとき

よって　$x^2+y^2-2x+6y+2-(x^2+y^2-10)=0$　より　$-2x+6y+12=0$

したがって，求める方程式は　$x-3y-6=0$

(3)　④が原点を通るとき，$x=0$，$y=0$ を代入して

$2-10k=0$　　$k=\frac{1}{5}$

このとき④より　$x^2+y^2-2x+6y+2+\frac{1}{5}(x^2+y^2-10)=0$

$6x^2+6y^2-10x+30y=0$　　$x^2+y^2-\frac{5}{3}x+5y=0$

$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{125}{18}$　　よって　**中心** $\boldsymbol{\left(\frac{5}{6},\ -\frac{5}{2}\right)}$　**半径** $\boldsymbol{\frac{5\sqrt{10}}{6}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 20 ー 4**

2 円 $x^2+y^2-6x+5=0$，$x^2+y^2-2x-2y+1=0$ について，次の問いに答えよ．

(1)　2 円の共有点を通る直線の式を求めよ．

(2)　2 円の共有点と点 (1，3) を通る円の中心の座標と半径を求めよ．

$x^2+y^2-6x+5=0$　……①，$x^2+y^2-2x-2y+1=0$　……②　について

円①，②の共有点を通る図形の方程式は

$x^2+y^2-2x-2y+1+k(x^2+y^2-6x+5)=0$　……③　と表される．

(1)　③が直線を表すのは $k=-1$ のとき

このとき　$x^2+y^2-2x-2y+1-(x^2+y^2-6x+5)=0$　　よって　$\boldsymbol{2x-y-2=0}$

(2)　③に $x=1$，$y=3$ を代入して　$3+9k=0$　　よって　$k=-\dfrac{1}{3}$

このとき③より　$x^2+y^2-2x-2y+1-\dfrac{1}{3}(x^2+y^2-6x+5)=0$

$x^2+y^2-3y-1=0$　　$x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{13}{4}$　　よって　**中心** $\left(\boldsymbol{0,\ \dfrac{3}{2}}\right)$　**半径** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{13}}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第21講　図形と方程式(3)

**例題21－1**

次の条件を満たす点Pの軌跡を求めよ.

(1)　2点A(−1，0)，B(1，2)から等距離にある点P

(2)　2点A(−2，0)，B(1，0)からの距離の比が2：1である点P

条件を満たす点Pの座標を$(x,\ y)$とおく.

(1)　AP＝BP　より　$AP^2=BP^2$

よって　$(x+1)^2+y^2=(x-1)^2+(y-2)^2$

$x^2+2x+1+y^2=x^2-2x+1+y^2-4y+4$

$x+y-1=0$

したがって，点Pは直線$x+y-1=0$上にある.

逆に，この直線上のすべての点は，条件を満たす.

ゆえに，求める軌跡は　**直線$\boldsymbol{x+y-1=0}$**

(2)　AP：BP＝2：1より　AP＝2BP　　つまり　$AP^2=4BP^2$

よって　$(x+2)^2+y^2=4\{(x-1)^2+y^2\}$

$x^2+4x+4+y^2=4(x^2-2x+1+y^2)$

$3x^2+3y^2-12x=0$

$x^2+y^2-4x=0$

よって　$(x-2)^2+y^2=4$

したがって，点Pは円　$(x-2)^2+y^2=4$　上にある.

逆に，この円上のすべての点は，条件を満たす.

ゆえに，求める軌跡は　**中心(2，0)　半径2の円**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 21 － 1**

2 点 A$(-4,\ 0)$，B$(2,\ 0)$ について，次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ．

(1)　2 点 A，B から等距離にある点 P

(2)　2 点 A，B からの距離の比が 3：1 にある点 P

条件を満たす点 P の座標を $(x,\ y)$ とおく．

(1)　AP＝BP　より　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって　$(x+4)^2+y^2=(x-2)^2+y^2$

$x^2+8x+16+y^2=x^2-4x+4+y^2$

$x=-1$

したがって，点 P は直線 $x=-1$ 上にある．

逆に，この直線上のすべての点は，条件を満たす．

ゆえに，求める軌跡は　**直線 $x=-1$**

(2)　AP：BP＝3：1 より　AP＝3BP　　つまり　$\mathrm{AP}^2=9\mathrm{BP}^2$

よって　$(x+4)^2+y^2=9\{(x-2)^2+y^2\}$

$x^2+8x+16+y^2=9(x^2-4x+4+y^2)$

$8x^2+8y^2-44x+20=0$

$x^2+y^2-\dfrac{11}{2}x+\dfrac{5}{2}=0$

よって　$\left(x-\dfrac{11}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{81}{16}$

したがって，点 P は円　$\left(x-\dfrac{11}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{81}{16}$ 上にある．

逆に，この円上のすべての点は，条件を満たす．

ゆえに，求める軌跡は　**中心 $\left(\dfrac{11}{4},\ 0\right)$　半径 $\dfrac{9}{4}$ の円**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 21 − 2**

(1)　実数 $a$ の値が変化するとき，放物線 $y=x^2-2ax+1$ の頂点 P の軌跡を求めよ．

(2)　$m$ が実数のとき，円 $x^2+y^2+2(m+2)x-6my=0$ の中心 P の軌跡を求めよ．

(1)　$y=x^2-2ax+1=(x-a)^2-a^2+1$　　頂点の座標は　$(a,\ -a^2+1)$

よって頂点 P の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$x=a$　……①　　　$y=-a^2+1$　……②

①，②より $a$ を消去して　$y=-x^2+1$

したがって，求める点 P の軌跡は　**放物線 $y=-x^2+1$**

(2)　$x^2+y^2+2(m+2)x-6my=0$　より　$(x+m+2)^2+(y-3m)^2=10m^2+4m+4$

$\left(10m^2+4m+4=10\left(m+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{18}{5}>0\right.$ より，この式は確かに円を表す.）

よって円の中心 P の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$x=-m-2$　……①，　　$y=3m$　……②

①より　$m=-x-2$　　これを②に代入して　$y=3(-x-2)=-3x-6$

したがって，求める点 P の軌跡は　**直線 $y=-3x-6$**

**類題 21 − 2**

(1)　$a$ が実数のとき，放物線 $y=x^2-4ax-8a$ の頂点 P の軌跡を求めよ．

(2)　実数 $m$ が変化するとき，円 $x^2+y^2+3mx-2m^2y+m^4+2m^2-1=0$ の中心が描く軌跡 P を求めよ．

(1)　$y=x^2-4ax-8a=(x-2a)^2-4a^2-8a$　　頂点の座標は $(2a,\ -4a^2-8a)$

よって頂点 P の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$x=2a$　……①　　$y=-4a^2-8a$　……②

①より　$a=\frac{x}{2}$　これを②に代入して　$y=-4\left(\frac{x}{2}\right)^2-8\cdot\frac{x}{2}=-x^2-4x$

したがって，求める点 P の軌跡は　**放物線 $y=-x^2-4x$**

(2)　$x^2+y^2+3mx-2m^2y+m^4+2m^2-1=0$　より　$\left(x+\frac{3}{2}m\right)^2+(y-m^2)^2=\frac{m^2}{4}+1$

（$\frac{m^2}{4}+1>0$ よりこの式は確かに円を表す.）

よって円の中心 P の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$x=-\frac{3}{2}m$　……①，　$y=m^2$　……②

①より　$m=-\frac{2}{3}x$　　これを②に代入して　$y=\left(-\frac{2}{3}x\right)^2=\frac{4}{9}x^2$

したがって，求める点 P の軌跡は　**放物線 $y=\frac{4}{9}x^2$**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 21 ー 3**

次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1)　$y<2x+1$　　(2)　$y \leqq x^2-x-2$　　(3)　$x^2+(y-2)^2 \leqq 1$

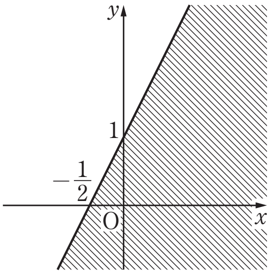
(1)　直線 $y=2x+1$ の下側の部分

(2)　放物線 $y=x^2-x-2$ およびその下側の部分

(3)　円 $x^2+(y-2)^2=1$ の周および内部

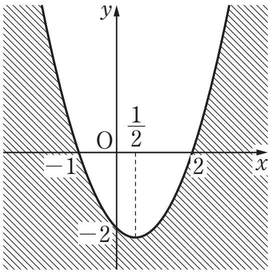
　よって，求める領域は下図斜線部分

(1)



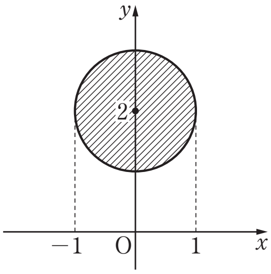

境界含まない．

(2)




境界含む．

(3)




境界含む．

**類題 21 ー 3**

次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1)　$2x+3y-6 \geqq 0$　　(2)　$y<-x^2+3x$　　(3)　$(x-2)^2+(y-1)^2<1$

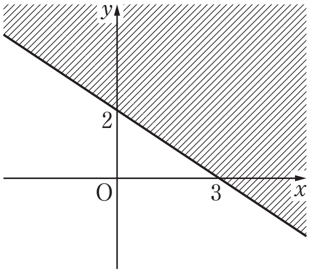
(1)　直線 $y=-\dfrac{2}{3}x+2$ およびその上側の部分

(2)　放物線 $y=-x^2+3x$ の下側の部分

(3)　円 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ の内部

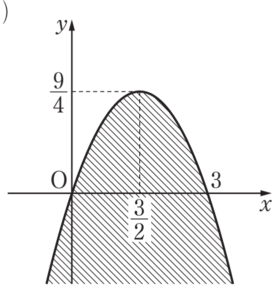
　よって，求める領域は下図斜線部分

(1)



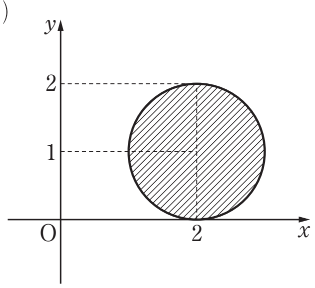

境界含む．

(2)




境界含まない．

(3)




境界含まない．

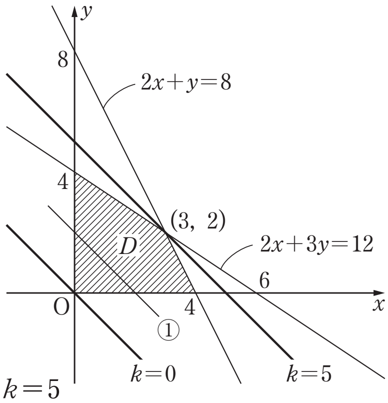
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 21 ー 4**

$x$，$y$ が 4 つの不等式　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y \leqq 8$，$2x+3y \leqq 12$ を同時に満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　4 つの不等式の表す領域を $D$ とする．$D$ を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 $D$ に属するとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ．




(1)　与えられた連立不等式の表す領域 $D$ は

4 点 $(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(3,\ 2)$，$(0,\ 4)$ を

頂点とする四角形の周および内部である．

したがって，領域 $D$ は右図斜線部．境界含む．

(2)　$x+y=k$　……①　とおく．

①は $y=-x+k$ より，傾き $-1$ の直線を表す．

この直線①が領域 $D$ と共有点をもつときの

$y$ 切片 $k$ の最大値と最小値を求める．

直線①が $(3,\ 2)$ を通るとき $k$ は最大で，その値は①より $k=5$

直線①が $(0,\ 0)$ を通るとき $k$ は最小で，その値は①より $k=0$

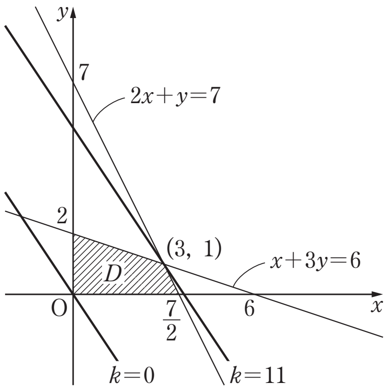
したがって，$x+y$ は

　$x=3$，$y=2$ のとき　**最大値 5**

　$x=0$，$y=0$ のとき　**最小値 0**　をとる．

**類題 21 ー 4**

$x$，$y$ が 4 つの不等式　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+3y \leqq 6$，$2x+y \leqq 7$ を同時に満たすとき，$3x+2y$ の最大値，最小値を求めよ．




与えられた連立不等式の表す領域を $D$ とすると

領域 $D$ は右図斜線部．境界含む．

$3x+2y=k$　……①　とおく．

①は $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{k}{2}$ より，傾き $-\dfrac{3}{2}$ の直線を表す．

この直線①が領域 $D$ と共有点をもつときの

$y$ 切片 $\dfrac{k}{2}$ の最大値と最小値，すなわち

$k$ の最大値と最小値を求める．

直線①が $(3,\ 1)$ を通るとき $k$ は最大で，その値は①より $k=3\cdot 3+2\cdot 1=11$

直線①が $(0,\ 0)$ を通るとき $k$ は最小で，その値は①より $k=0$

したがって，$3x+2y$ は

　$x=3$，$y=1$ のとき　**最大値 11**

　$x=0$，$y=0$ のとき　**最小値 0**　をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 22 講　三角関数(1)

**例題 22 ー 1**

(1)　次の角の動径を図示せよ．また，角を弧度法で表せ．

(ア)　72°　　(イ)　420°　　(ウ)　−200°

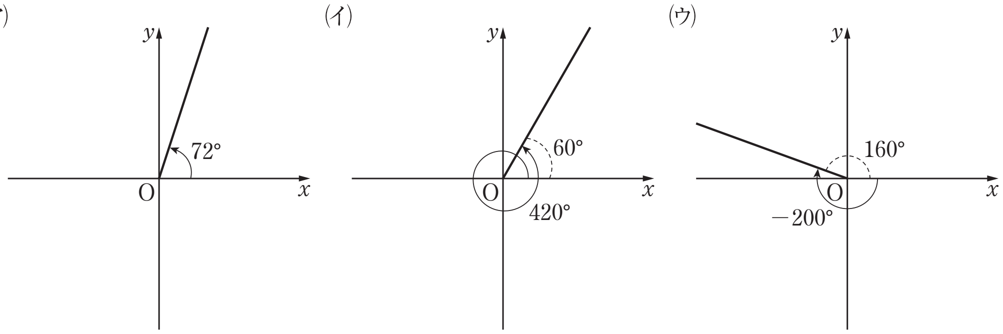
(2)　半径 6，中心角 $\frac{\pi}{3}$ の扇形の弧の長さおよび面積を求めよ．

(1)　(ア)　$72° = 72 \times \frac{\pi}{180} = \boldsymbol{\frac{2}{5}\pi}$　　(イ)　$420° = 420 \times \frac{\pi}{180} = \boldsymbol{\frac{7}{3}\pi}$

(ウ)　$-200° = -200 \times \frac{\pi}{180} = \boldsymbol{-\frac{10}{9}\pi}$

動径は下図．

(ア)　(イ)　(ウ)




(2)　弧の長さは　$6 \cdot \frac{\pi}{3} = \boldsymbol{2\pi}$　　面積は　$\frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \boldsymbol{6\pi}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 22 ー 1**

(1)　次の角の動径を図示せよ．また，角を弧度法で表せ．

　(ア)　225°　　　(イ)　800°　　　(ウ)　−510°

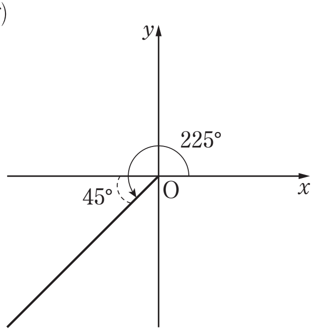
(2)　半径 4，中心角 $\frac{5}{6}\pi$ の扇形の弧の長さおよび面積を求めよ．

(1)　(ア)　$225^\circ = 225\times\frac{\pi}{180} = \boldsymbol{\frac{5}{4}\pi}$　　　(イ)　$800^\circ = 800\times\frac{\pi}{180} = \boldsymbol{\frac{40}{9}\pi}$

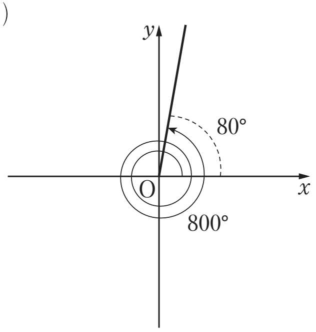
　(ウ)　$-510^\circ = -510\times\frac{\pi}{180} = \boldsymbol{-\frac{17}{6}\pi}$

　動径は下図．

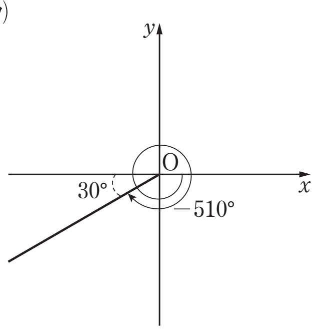
(ア)




(イ)




(ウ)




(2)　弧の長さは $4\cdot\frac{5}{6}\pi = \boldsymbol{\frac{10}{3}\pi}$　　　面積は　$\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{5}{6}\pi = \boldsymbol{\frac{20}{3}\pi}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題22－2**

(1)　$\theta=-\dfrac{3}{4}\pi$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\theta$ の動径が第3象限にあり，$\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(1)　$\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$　　$\cos\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$　　$\tan\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)=\boldsymbol{1}$

(2)　$\theta$ の動径が第3象限にあることより，$\cos\theta<0$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$　　よって　$\cos\theta=\boldsymbol{-\dfrac{3}{5}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\dfrac{4}{5}}{-\dfrac{3}{5}}=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$

**類題22－2**

(1)　$\theta=\dfrac{7}{3}\pi$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$，　$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(1)　$\sin\dfrac{7}{3}\pi=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$　　$\cos\dfrac{7}{3}\pi=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$　　$\tan\dfrac{7}{3}\pi=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(2)　$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ より，$\theta$ の動径は第4象限にある．よって　$\sin\theta<0$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$　　よって　$\sin\theta=\boldsymbol{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{\dfrac{1}{3}}=\boldsymbol{-2\sqrt{2}}$

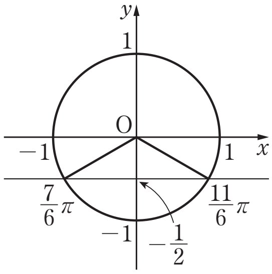
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 22 － 3**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け.

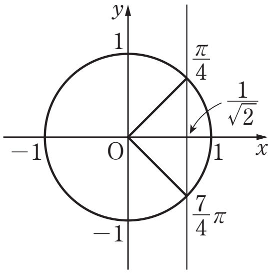
(1)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\tan\theta = -\sqrt{3}$

(1)



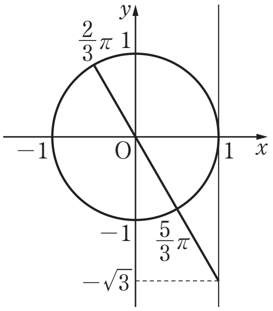

$$\boldsymbol{\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi}$$

(2)




$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi}$$

(3)



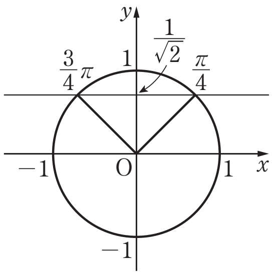

$$\boldsymbol{\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi}$$

**類題 22 － 3**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け.

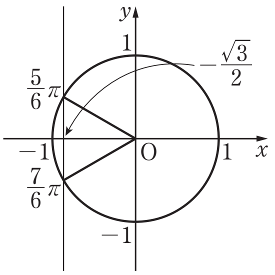
(1)　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan\theta = \sqrt{3}$

(1)



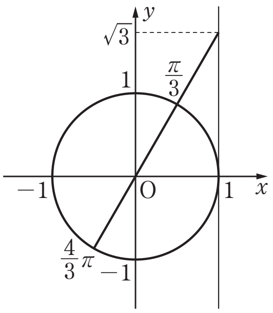

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi}$$

(2)




$$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi}$$

(3)




$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi}$$

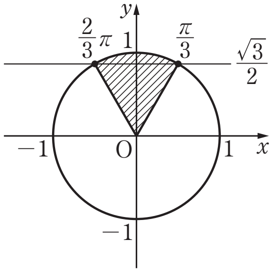
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 22 ー 4**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け.

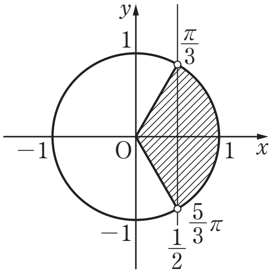
(1)　$\sin\theta \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\theta > \dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan\theta \geqq 1$

(1)



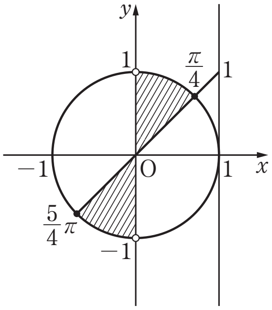

$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi}$

(2)




$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi}$

(3)



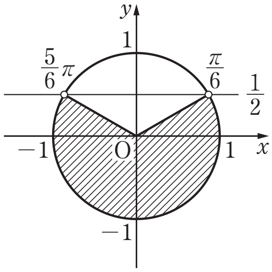

$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{4}\pi \leqq \theta < \dfrac{3}{2}\pi}$

**類題 22 ー 4**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け.

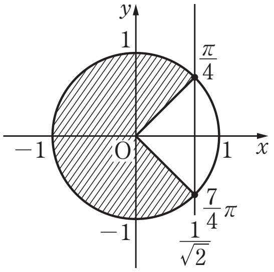
(1)　$\sin\theta < \dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\tan\theta < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(1)



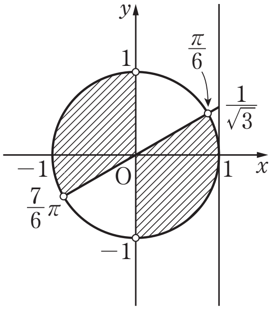

$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi}$

(2)




$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{7}{4}\pi}$

(3)




$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{7}{6}\pi,}$

$\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 23 講　三角関数(2)

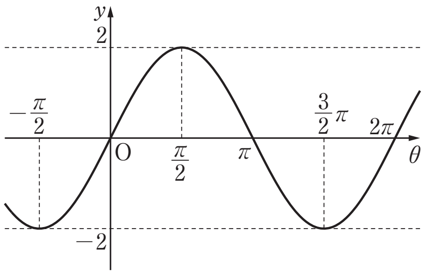
**例題 23 ー 1**

次の関数のグラフをかけ．また，その周期と値域を求めよ．

(1)　$y=2\sin\theta$　　(2)　$y=\sin\theta+1$

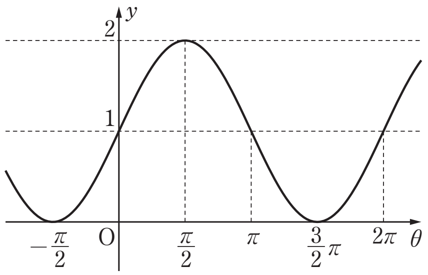
(3)　$y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(4)　$y=\sin 2\theta$

(1)



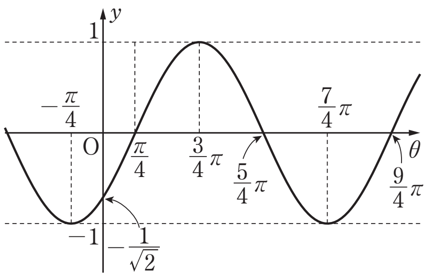
**周期　$2\pi$　　値域　$-2\leqq y\leqq 2$**

(2)



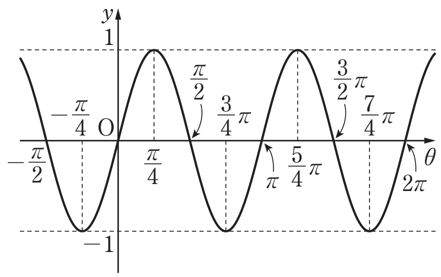
**周期　$2\pi$　　値域　$0\leqq y\leqq 2$**

(3)



**周期　$2\pi$　　値域　$-1\leqq y\leqq 1$**

(4)



**周期　$\pi$　　値域 $-1\leqq y\leqq 1$**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

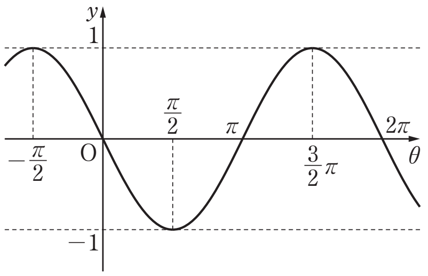
**類題 23 － 1**

次の関数のグラフをかけ．また，その周期と値域を求めよ．

(1)　$y=-\sin\theta$　　(2)　$y=\sin\theta-1$

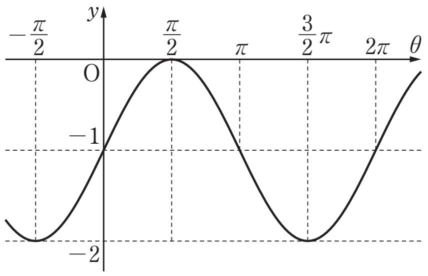
(3)　$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$　　(4)　$y=\sin\dfrac{\theta}{2}$

(1)



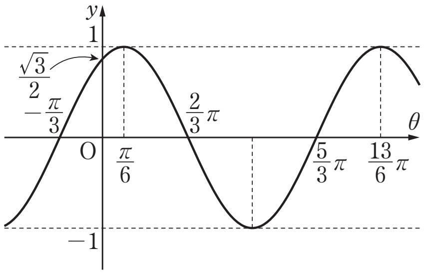

**周期　$2\pi$　　値域　$-1\leqq y\leqq 1$**

(2)



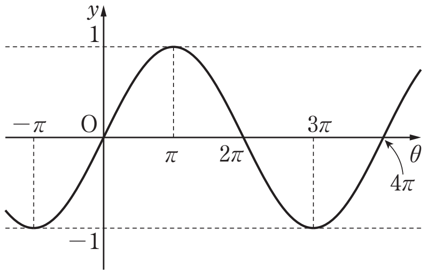

**周期　$2\pi$　　値域　$-2\leqq y\leqq 0$**

(3)




**周期　$2\pi$　　値域　$-1\leqq y\leqq 1$**

(4)




**周期　$4\pi$　　値域　$-1\leqq y\leqq 1$**

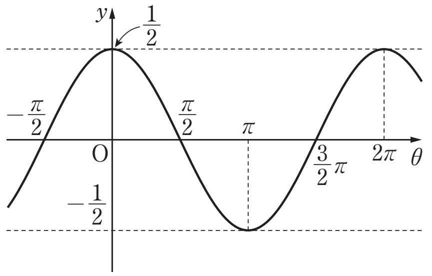
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 23 − 2**

次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

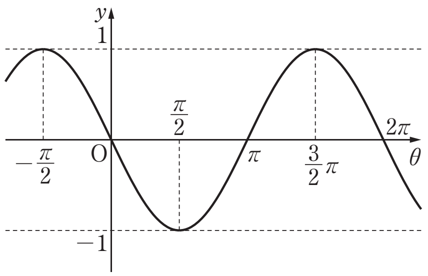
(1)　$y=\frac{1}{2}\cos\theta$　　(2)　$y=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$　　(3)　$y=\cos\frac{\theta}{2}$

(1)



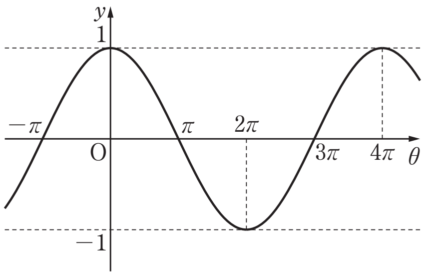

**周期　$2\pi$**

(2)




**周期　$2\pi$**

(3)




**周期　$4\pi$**

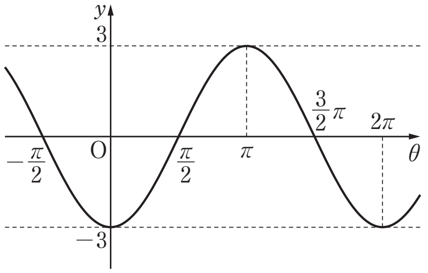
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 23 ― 2**

次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

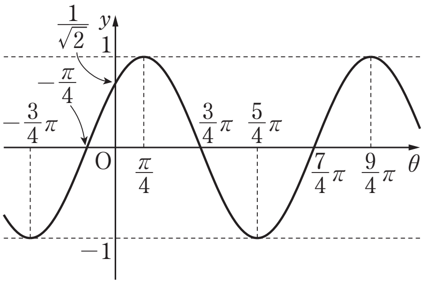
(1)　$y=-3\cos\theta$　(2)　$y=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$　(3)　$y=\cos 3\theta$

(1)



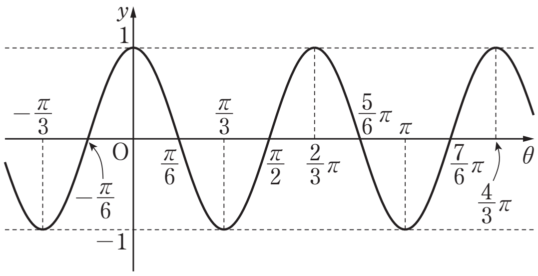

**周期　$2\pi$**

(2)




**周期　$2\pi$**

(3)




**周期　$\dfrac{2}{3}\pi$**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 23 − 3**

$\alpha$ が鋭角，$\beta$ が鈍角で，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$ のとき，次の値を求めよ．

(1)　$\sin(\alpha+\beta)$　　(2)　$\cos(\alpha-\beta)$

$\alpha$ は鋭角より　$\cos\alpha>0$　　よって　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

$\beta$ は鈍角より　$\sin\beta>0$　　よって　$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{12}{13}$

(1)　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)+\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{12}{13}=\boldsymbol{\dfrac{33}{65}}$

(2)　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)+\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{12}{13}=\boldsymbol{\dfrac{16}{65}}$

**類題 23 − 3**

$\alpha$ の動径が第 3 象限，$\beta$ の動径が第 2 象限にあり，$\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ．

(1)　$\sin(\alpha-\beta)$　　(2)　$\cos(\alpha+\beta)$

$\alpha$ の動径が第 3 象限にあるので，$\cos\alpha<0$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$

$\beta$ の動径が第 2 象限にあるので，$\sin\beta>0$

よって　$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

(1)　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=-\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)-\left(-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\dfrac{4}{5}=\boldsymbol{\dfrac{24}{25}}$

(2)　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)-\left(-\dfrac{4}{5}\right)\cdot\dfrac{4}{5}=\mathbf{1}$

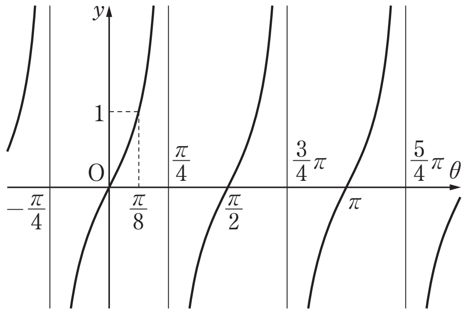
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 23 － 4**

(1)　$y = \tan 2\theta$ のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

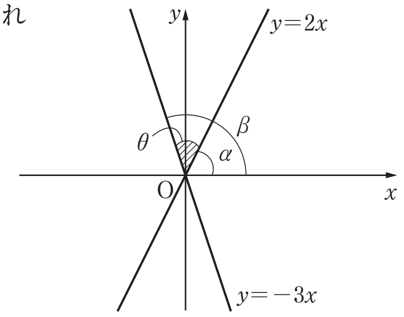
(2)　$y = 2x$，$y = -3x$ のなす鋭角 $\theta$ を求めよ．

(1)




**周期　$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$**

(2)　$y = 2x$，$y = -3x$ と $x$ 軸の正の向きがなす角をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とすると，$\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = -3$




$$\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$

$$= \frac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2} = 1$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より　$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

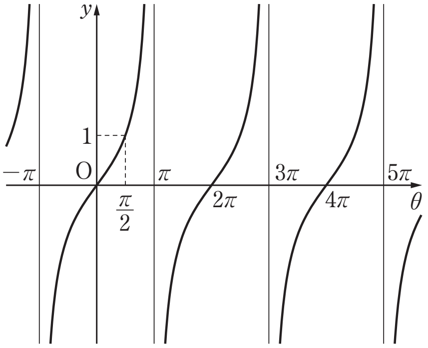
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 23 ― 4**

(1)　$y=\tan\dfrac{\theta}{2}$ のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．

(2)　$y=(2+\sqrt{3})x$，$y=-x$ のなす角 $\theta$ を求めよ．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1)




**周期　$2\pi$**

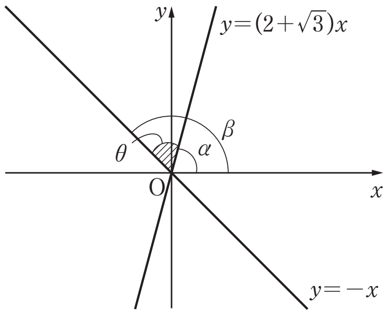
(2)　$y=(2+\sqrt{3})x$，$y=-x$ と $x$ 軸の正の向きがなす角をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とすると

$\tan\alpha=2+\sqrt{3}$，$\tan\beta=-1$

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{-1-(2+\sqrt{3})}{1+(-1)\cdot(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{-3-\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{-(1+\sqrt{3})}=\sqrt{3}$$




$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第24講　三角関数(3)

**例題 24 ー 1**

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$，$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，$\sin2\theta$，$\cos2\theta$，$\tan2\theta$ の値を求めよ．

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ より　$\cos\theta<0$　　よって　$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=-\dfrac{3}{4}$

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}}{8}}$$

$$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(-\frac{3}{4}\right)^2-\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\frac{9}{16}-\frac{7}{16}=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

$$\tan2\theta=\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}=\frac{\frac{3\sqrt{7}}{8}}{\frac{1}{8}}=\boldsymbol{3\sqrt{7}}$$

**(別解)**　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

よって　$\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}}{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}=\dfrac{6\sqrt{7}}{9-7}=3\sqrt{7}$

**類題 24 ー 1**

$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$，$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ のとき，$\sin2\theta$，$\cos2\theta$，$\tan2\theta$ の値を求めよ．

$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ より　$\sin\theta<0$　　よって　$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2}=-\dfrac{1}{5}$

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=\boldsymbol{-\frac{4\sqrt{6}}{25}}$$

$$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2-\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{24}{25}-\frac{1}{25}=\boldsymbol{\frac{23}{25}}$$

$$\tan2\theta=\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}=\frac{-\frac{4\sqrt{6}}{25}}{\frac{23}{25}}=\boldsymbol{-\frac{4\sqrt{6}}{23}}$$

**(別解)**　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-1}{2\sqrt{6}}$

よって　$\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\cdot\frac{-1}{2\sqrt{6}}}{1-\left(\frac{-1}{2\sqrt{6}}\right)^2}=\dfrac{-4\sqrt{6}}{24-1}=-\dfrac{4\sqrt{6}}{23}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 24 － 2**

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，$\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\tan\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めよ．

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\cos\theta>0$　　よって　$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=\dfrac{3}{4}$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1-\frac{3}{4}}{2}=\frac{1}{8}$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{1+\frac{3}{4}}{2}=\frac{7}{8}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$　　よって　$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$，$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$

ゆえに　$\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1}{8}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$　　$\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{7}{8}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{14}}{4}}$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{7}}}$$

**(別解)**　$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{7}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$　　よって　$\tan\dfrac{\theta}{2}>0$　　ゆえに　$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 24 ー 2**

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\tan\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めよ．

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より　$\cos\theta<0$　　よって　$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=-\dfrac{1}{3}$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{2}{3}$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{1}{3}$$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より　$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$　　よって　$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$，$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$

ゆえに　$\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$　　$\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$$

**（別解）**　$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}=2$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より　$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$　　よって　$\tan\dfrac{\theta}{2}>0$　　ゆえに　$\tan\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 24 ー 3**

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ．ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha\leqq\pi$　とする．

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2)　$\sin\theta-\cos\theta$

(1)　$\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$　より

$$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)=2\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)=\mathbf{2\sin\left(\boldsymbol{\theta}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{6}\right)}$$

(2)　$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$　より

$$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{\sqrt{2}\sin\left(\boldsymbol{\theta}-\frac{\boldsymbol{\pi}}{4}\right)}$$

**類題 24 ー 3**

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ．ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha\leqq\pi$　とする．

(1)　$\sin\theta+\cos\theta$　　(2)　$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$

(1)　$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$　より

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{\sqrt{2}\sin\left(\boldsymbol{\theta}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{4}\right)}$$

(2)　$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$　より

$$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=2\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}-\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=\mathbf{2\sin\left(\boldsymbol{\theta}-\frac{\boldsymbol{\pi}}{3}\right)}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

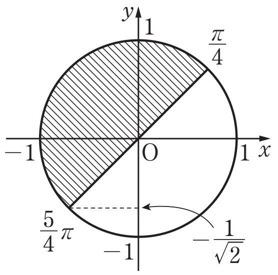
**例題 24 － 4**

次の関数の最大値と最小値を求めよ．

(1)　$y=\sin\theta$　$\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi\right)$　　(2)　$y=2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

(3)　$y=\cos 2\theta-2\cos\theta+1$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

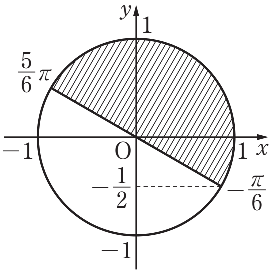
(1)




最大値　**1**　$\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right.$ のとき$)$

最小値　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$　$\left(\theta=\dfrac{5}{4}\pi\right.$ のとき$\left.\right)$

(2)　$\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$　より



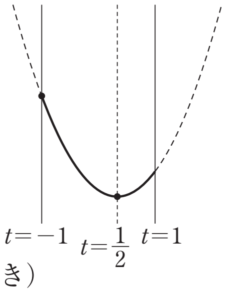

$y=2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta=4\left(\sin\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos\theta\cdot\dfrac{1}{2}\right)$

$=4\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

よって　最大値　$1\times4=\mathbf{4}$　$\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}\right.$　つまり　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき$\left.\right)$

最小値　$-\dfrac{1}{2}\times4=\mathbf{-2}$　$\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}\right.$　つまり　$\theta=0$ のとき$\left.\right)$




(3)　$y=\cos 2\theta-2\cos\theta+1=2\cos^2\theta-1-2\cos\theta+1$

$=2\cos^2\theta-2\cos\theta$

$\cos\theta=t$ とおくと　　$0\leqq\theta<2\pi$　より　$-1\leqq t\leqq1$

このとき　$y=2t^2-2t=2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$

よって　最大値　**4**　($t=-1$　つまり　$\cos\theta=-1$　より　$\theta=\pi$ のとき)

最小値　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$　$\left(t=\dfrac{1}{2}\right.$　つまり　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　より　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$ のとき$\left.\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

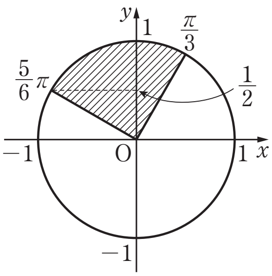
**類題 24 ー 4**

次の関数の最大値と最小値を求めよ．

(1)　$y=\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta$　$\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2)　$y=\cos 2\theta-2\cos\theta+4$　$\left(\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{7}{6}\pi\right)$

(1)　$\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=2\sqrt{3}$　より




$y=\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta=2\sqrt{3}\left(\sin\theta\cdot\dfrac{1}{2}+\cos\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

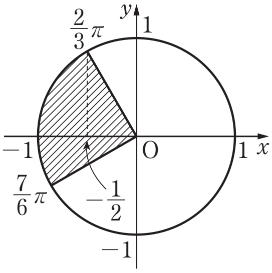
よって　最大値　$1\times2\sqrt{3}=\mathbf{2\sqrt{3}}$　$\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}\right.$　つまり　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき$\left.\right)$

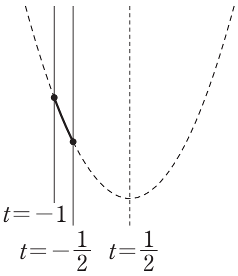
最小値　$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}=\mathbf{\sqrt{3}}$　$\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{6}\pi\right.$　つまり　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき$\left.\right)$

(2)　$y=\cos 2\theta-2\cos\theta+4=2\cos^2\theta-1-2\cos\theta+4=2\cos^2\theta-2\cos\theta+3$

$\cos\theta=t$ とおくと　$\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{7}{6}\pi$　より

$-1\leqq t\leqq-\dfrac{1}{2}$




このとき　$y=2t^2-2t+3=2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}$

よって　最大値　**7**　($t=-1$　つまり　$\cos\theta=-1$　より　$\theta=\pi$ のとき)

最小値　$\mathbf{\dfrac{9}{2}}$　$\left(t=-\dfrac{1}{2}\right.$　つまり　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$　より　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき$\left.\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 練習問題解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第1講　展開

次の式を展開せよ.

(1)　$(2x-3y+z)(2x+3y-z)=4x^2-$ ア $y^2-z^2+$ イ $yz$

(2)　$(x-2y-3z)^2=x^2+4y^2+$ ウ $z^2-4xy+$ エオ $yz-6zx$

(3)　$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)=x^4+$ カ $x^3-7x^2-$ キク $x+24$

(4)　$(a+1)^3(a-1)^3=a^{\boxed{ケ}}-3a^4+$ コ $a^2-1$

**解答例**

(1)　与式 $=\{2x-(3y-z)\}\{2x+(3y-z)\}$

$=4x^2-(3y-z)^2$

$=4x^2-(9y^2-6yz+z^2)$

$=4x^2-\mathbf{9}y^2-z^2+\mathbf{6}yz$

(2)　与式 $=x^2+(-2y)^2+(-3z)^2+2\cdot x\cdot(-2y)+2\cdot(-2y)\cdot(-3z)+2\cdot(-3z)\cdot x$

$=x^2+4y^2+\mathbf{9}z^2-4xy+\mathbf{12}yz-6zx$

(3)　与式 $=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)$

$=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24$

$=x^4+4x^3+4x^2-11x^2-22x+24$

$=x^4+\mathbf{4}x^3-7x^2-\mathbf{22}x+24$

(4)　与式 $=\{(a+1)(a-1)\}^3=(a^2-1)^3=(a^2)^3-3(a^2)^2\cdot 1+3\cdot a^2\cdot 1^2-1^3$

$=a^{\mathbf{6}}-3a^4+\mathbf{3}a^2-1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第２講　因数分解

次の式を因数分解せよ.

(1)　$2x^2-13x+6=($ ア $x-$ イ $)(x-$ ウ $)$

(2)　$8x^3+27y^3=(2x+3y)(4x^2-$ エ $xy+9y^2)$

(3)　$x^4-2x^2-8=(x+$ オ $)(x-$ カ $)(x^2+2)$

(4)　$x^2-2y^2-xy+3y-1=(x-$ キ $y+$ ク $)(x+y-$ ケ $)$

**解答例**

(1)　与式$=(\mathbf{2}x-\mathbf{1})(x-\mathbf{6})$

(2)　与式$=(2x)^3+(3y)^3$

$=(2x+3y)\{(2x)^2-2x\cdot 3y+(3y)^2\}$

$=(2x+3y)(4x^2-\mathbf{6}xy+9y^2)$

(3)　与式$=(x^2)^2-2x^2-8$

$=(x^2-4)(x^2+2)$

$=(x+\mathbf{2})(x-\mathbf{2})(x^2+2)$

(4)　与式$=x^2-yx-2y^2+3y-1$

$=x^2-yx-(2y-1)(y-1)$

$=(x-\mathbf{2}y+\mathbf{1})(x+y-\mathbf{1})$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第3講　実数・絶対値・1次不等式

(1) $|x-2|$ は　$x \geqq 2$ のとき $\boxed{\text{ア}}$　$x<2$ のとき $\boxed{\text{イ}}$ である.

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを次の①～④から選べ.

① $x-2$　② $x+2$　③ $-x+2$　④ $-x-2$

(2) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を $a$, 小数部分を $b$ とするとき,

$a=\boxed{\text{ウ}}$, $\dfrac{1}{b}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}+\boxed{\text{オ}}}{2}$ である.

(3) $x-6<3x-4 \leqq 2x+1$ を満たす整数 $x$ は $\boxed{\text{カ}}$ 個ある.

(4) 次の不等式の解を求めよ.

(ア) $|x-3| \leqq 5$　$-\boxed{\text{キ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ク}}$

(イ) $|3x+2|>4$　$x<-\boxed{\text{ケ}}$, $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}<x$

**解答例**

(1) $x \geqq 2$ のとき　$x-2 \geqq 0$　より　$|x-2|=x-2$　よって　①

$x<2$ のとき　$x-2<0$　より　$|x-2|=-(x-2)=-x+2$　よって　③

(2) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$

$1<\sqrt{3}<2$　より　$\sqrt{3}$ の整数部分は1

よって　$2+\sqrt{3}$ の整数部分は　$a=\mathbf{3}$　小数部分は　$b=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$

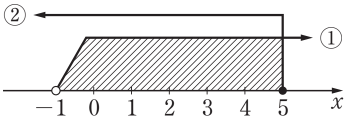
$\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{3-1}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{1}}{2}$

(3) $\begin{cases} x-6<3x-4 & \cdots\cdots ① \\ 3x-4 \leqq 2x+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①より　$-2x<2$　$x>-1$　②より　$x \leqq 5$

①, ②の共通部分を求めて　$-1<x \leqq 5$

これを満たす整数 $x$ は $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$ の **6** 個である.




(4)(ア) $|x-3| \leqq 5$ より　$-5 \leqq x-3 \leqq 5$

よって　$\mathbf{-2} \leqq x \leqq \mathbf{8}$

(イ) $|3x+2|>4$ より

$3x+2<-4$, $4<3x+2$　$3x<-6$, $2<3x$　よって　$x<\mathbf{-2}$, $\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}<x$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第4講　集合・命題と条件

(1)　10 以下のすべての自然数を全体集合とする．その部分集合 $A$，$B$ について

$$A\cap B=\{3\},\ \overline{A}\cap B=\{4,\ 7,\ 10\},\ \overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 2,\ 5,\ 8\}$$

である．このとき，$A\cap\overline{B}=\{$ [ア]，[イ] $\}$ である．

(2)　$x$ を実数とするとき，次の(i)〜(iii)の条件は $x^2=4$ であるためのどんな条件か．最も適切なものを下の①〜④からそれぞれ選べ．

(i)　$x=2$　は [ウ]

(ii)　$x=2$ または $x=-2$　は [エ]

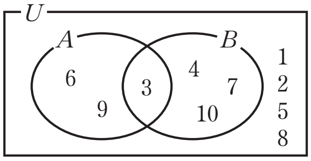
(iii)　$|x|\geqq 2$　は [オ]

①　必要条件であるが十分条件でない　　②　十分条件であるが必要条件でない
③　必要十分条件である　　④　必要条件でも十分条件でもない

(3)　$x$，$y$ は実数とする．命題「$x+y\leqq 0 \Longrightarrow x\leqq 0$　または　$y\leqq 0$」の逆は [カ]，裏は [キ]，対偶は [ク] である．また，この命題は [ケ] である．[カ]〜[ク] に当てはまるものを次の①〜③から，[ケ] に当てはまるものを④，⑤からそれぞれ選べ．

①　$x+y>0 \Longrightarrow x>0$　かつ　$y>0$　　②　$x>0$　かつ　$y>0 \Longrightarrow x+y>0$
③　$x\leqq 0$　または　$y\leqq 0 \Longrightarrow x+y\leqq 0$　　④　真　　⑤　偽

**解答例**




(1)　右図より　$A\cap\overline{B}=\{\mathbf{6},\ \mathbf{9}\}$

(2)　$x^2=4$ より　$x=2$ または $x=-2$

(i)　$x=2 \Longrightarrow x^2=4$ は真　　$x^2=4 \Longrightarrow x=2$ は偽（反例　$x=-2$）

よって　$x=2$ は $x^2=4$ が成り立つための十分条件であるが必要条件ではない　**②**

(ii)「$x=2$　または　$x=-2$」は　$x^2=4$ と同値　**③**

(iii)　$|x|\geqq 2$　より　$x\leqq -2$，$2\leqq x$

$|x|\geqq 2 \Longrightarrow x^2=4$ は　偽（反例　$x=3$）　　$x^2=4 \Longrightarrow |x|\geqq 2$ は真

よって　$|x|\geqq 2$ は $x^2=4$ が成り立つための必要条件であるが十分条件ではない　**①**

(3)　命題「$x+y\leqq 0 \Longrightarrow x\leqq 0$　または　$y\leqq 0$」について

逆　：「$x\leqq 0$　または　$y\leqq 0 \Longrightarrow x+y\leqq 0$」　**③**

裏　：「$x+y>0 \Longrightarrow x>0$　かつ　$y>0$」　**①**

対偶：「$x>0$　かつ　$y>0 \Longrightarrow x+y>0$」　**②**

対偶が真よりもとの命題も真　**④**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第5講　2次関数(1)

(1)　次の放物線の頂点の座標を求めよ．

（i）　$y=-x^2-4x+1$

頂点 $(-$ ア $,$ イ $)$

（ii）　$y=2x^2-5x+2$

頂点 $\left(\dfrac{ウ}{エ},\ -\dfrac{オ}{カ}\right)$

(2)　次の2次関数の最大値，最小値を求めよ．

（i）　$y=2x^2+4x-1\ (-2 \leqq x \leqq 1)$　最大値 キ　最小値 $-$ ク

（ii）　$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x-3\ (-2 \leqq x \leqq 0)$　最大値 $-$ ケ　最小値 $-$ コ

**解答例**

(1)(i)　$y=-x^2-4x+1=-(x^2+4x)+1=-\{(x+2)^2-4\}+1=-(x+2)^2+5$

よって　頂点の座標は　$\mathbf{(-2,\ 5)}$

(ii)　$y=2x^2-5x+2=2\left(x^2-\dfrac{5}{2}x\right)+2=2\left\{\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2-\dfrac{25}{16}\right\}+2=2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}$

よって　頂点の座標は　$\left(\mathbf{\dfrac{5}{4}},\ \mathbf{-\dfrac{9}{8}}\right)$

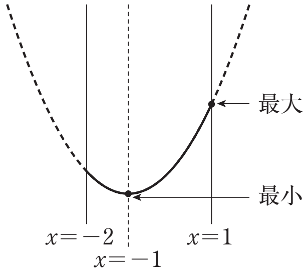
(2)(i)　$y=2x^2+4x-1=2(x^2+2x)-1$

$=2\{(x+1)^2-1\}-1=2(x+1)^2-3$　　軸　$x=-1$

よって　$-2 \leqq x \leqq 1$　において

$x=1$ のとき　最大値　**5**

$x=-1$ のとき　最小値　**−3**



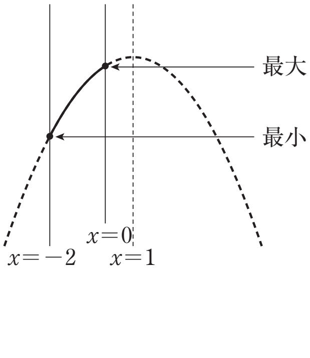

(ii)　$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x-3=-\dfrac{1}{2}(x^2-2x)-3$

$=-\dfrac{1}{2}\{(x-1)^2-1\}-3=-\dfrac{1}{2}(x-1)^2-\dfrac{5}{2}$　　軸　$x=1$

よって　$-2 \leqq x \leqq 0$　において

最大値　$f(0)=\mathbf{-3}$

最小値　$f(-2)=\mathbf{-7}$






ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第６講　２次関数(2)

(1)　２次関数 $y=x^2-2ax+2a+3$ の $0 \leqq x \leqq 4$ における最小値は以下の通り．

$a<0$ のとき　[ア] $a+3$

$0 \leqq a \leqq 4$ のとき　$-a^2+$ [イ] $a+$ [ウ]

$4<a$ のとき　$-$ [エ] $a+19$

(2)　２次関数 $f(x)=2x^2-4ax-3$ の $2 \leqq x \leqq 4$ における最大値は以下の通り．

$a<3$ のとき　$-16a+$ [オカ]

$a=3$ のとき　[キクケ]

$3<a$ のとき　$-8a+$ [コ]

**解答例**

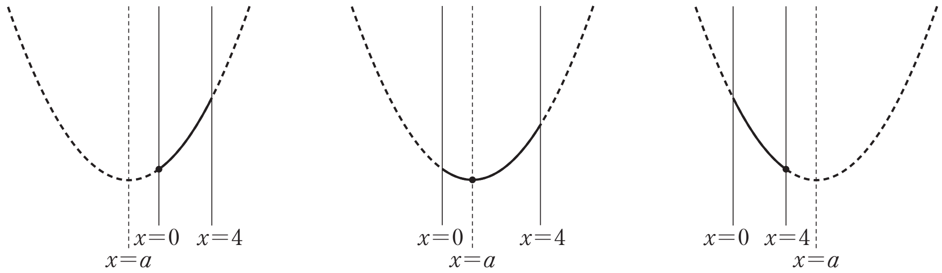
(1)　$y=x^2-2ax+2a+3=(x-a)^2-a^2+2a+3$　　軸　$x=a$

$a<0$ のとき　　最小値　$\mathbf{2}a+3$（$x=0$ のとき）

$0 \leqq a \leqq 4$ のとき　最小値　$-a^2+\mathbf{2}a+\mathbf{3}$（$x=a$ のとき）

$4<a$ のとき　　最小値　$-\mathbf{6}a+19$（$x=4$ のとき）

（参考図）　$a<0$ のとき　　　$0 \leqq a \leqq 4$ のとき　　　$4<a$ のとき



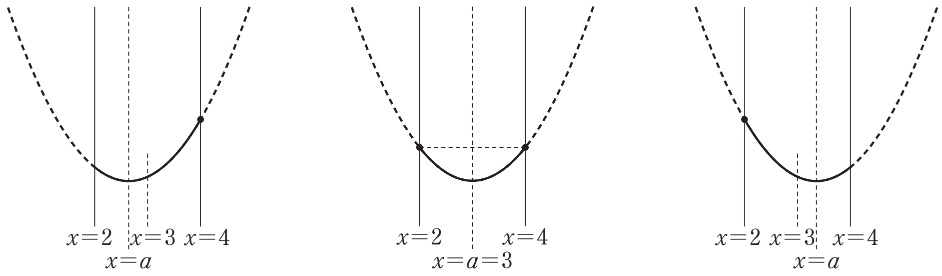

(2)　$f(x)=2x^2-4ax-3=2(x-a)^2-2a^2-3$　　軸　$x=a$

$a<3$ のとき　最大値　$f(4)=-16a+\mathbf{29}$

$a=3$ のとき　最大値　$f(2)=f(4)=\mathbf{-19}$

$3<a$ のとき　最大値　$f(2)=-8a+\mathbf{5}$

（参考図）　$a<3$ のとき　　　$a=3$ のとき　　　$3<a$ のとき




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第７講　２次関数(3)

(1)　２次関数 $y=2x^2-4(k-1)x+2k^2-k-1$ のグラフと $x$ 軸との共有点の個数は以下の通り.

$k<$ [ア] のとき [イ] 個　　$k=$ [ア] のとき [ウ] 個

$k>$ [ア] のとき [エ] 個

(2)　２次不等式 $2x^2+5x-3\leqq 0$　の解は　$-$[オ]$\leqq x\leqq \dfrac{1}{[カ]}$　である.

(3)　次の２次不等式の解を　①すべての実数　　②解なし　より選べ.

(i)　$x^2-x+\dfrac{1}{4}\geqq 0$ [キ]　　(ii)　$x^2-6x+11>0$ [ク]

(iii)　$-x^2+2x-5\geqq 0$ [ケ]

**解答例**

(1)　２次関数 $y=2x^2-4(k-1)x+2k^2-k-1$　と $x$ 軸との共有点の個数は,

２次方程式 $2x^2-4(k-1)x+2k^2-k-1=0$ の実数解の個数である. 判別式を $D$ とすると,

$D=\{-4(k-1)\}^2-4\cdot 2\cdot(2k^2-k-1)=16(k-1)^2-16k^2+8k+8$

$=16(k^2-2k+1)-16k^2+8k+8=-24k+24$

$D>0$　つまり　$-24k+24>0$　より　$k<\mathbf{1}$　のとき　**2** 個

$D=0$　つまり　$-24k+24=0$　より　$k=1$　のとき　**1** 個

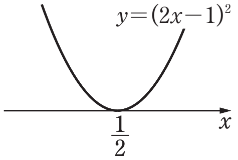
$D<0$　つまり　$-24k+24<0$　より　$k>1$　のとき　**0** 個

(2)　$2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)\leqq 0$　の解は　$-\mathbf{3}\leqq x\leqq \dfrac{1}{\mathbf{2}}$

(3)(i)　$x^2-x+\dfrac{1}{4}\geqq 0$　より　$4x^2-4x+1\geqq 0$　　$(2x-1)^2\geqq 0$

よって　$y=(2x-1)^2$ のグラフは右図.

したがって　$x^2-x+\dfrac{1}{4}\geqq 0$　の解は　すべての実数（①）

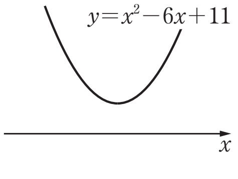



(ii)　$x^2-6x+11=0$ の判別式を $D$ とすると

$D=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 11=-8<0$

よって　$y=x^2-6x+11$ のグラフは右図.

したがって　$x^2-6x+11>0$ の解は　すべての実数（①）



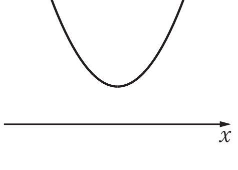

(iii)　$-x^2+2x-5\geqq 0$　より　$x^2-2x+5\leqq 0$

$x^2-2x+5=0$ の判別式を $D$ とすると

$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 5=4-20=-16<0$

よって　$y=x^2-2x+5$ のグラフは右図.

したがって　$-x^2+2x-5\geqq 0$ の　解はない（②）




ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第8講　2次関数(4)

(1)　2次不等式 $x^2-ax-2a>0$ がすべての実数 $x$ で成り立つような定数 $a$ の範囲は

[アイ] $<a<$ [ウ]

(2)　2次方程式 $x^2+2(m-1)x+3-m=0$ が次の条件を満たすとき，定数 $m$ の値の範囲をそれぞれ求めよ.

(i)　正の解と負の解を1つずつもつ.　$m>$ [エ]

(ii)　1より小さい異なる2つの解をもつ.　$m>$ [オ]

**解答例**

(1)　$x^2$ の係数は正．判別式を $D$ とおくと，

$D=a^2-4\cdot1\cdot(-2a)=a^2+8a$

すべての実数 $x$ で $x^2-ax-2a>0$ が成り立つための条件は　$D<0$

よって　$D=a^2+8a=a(a+8)<0$　より　$\mathbf{-8<a<0}$

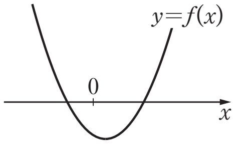
(2)　$f(x)=x^2+2(m-1)x+3-m$　とおく.

$f(x)=(x+m-1)^2-m^2+m+2$　より　軸は $x=1-m$

(i)　$y=f(x)$ のグラフが $x$ 軸の $x<0$，$0<x$ の部分とそれぞれ共有点をもてばよい．それは

$f(0)<0$

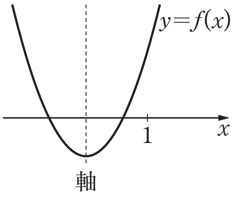
つまり　$3-m<0$　より　$\mathbf{m>3}$　のときである.




(ii)　$y=f(x)$ のグラフが $x$ 軸の $x<1$ の部分と異なる2つの共有点をもてばよい．それは次の①，②，③が同時に成り立つときである.

$f(1)>0$　……①　　($f(x)$ の軸)$<1$　……②

判別式 $D>0$　……③




①より　$1+2(m-1)+3-m>0$

$m>-2$

②より　$1-m<1$

$m>0$

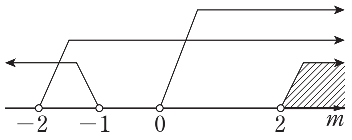
③より　$\{2(m-1)\}^2-4\cdot1\cdot(3-m)>0$

$m^2-m-2>0$

$(m+1)(m-2)>0$

よって　$m<-1,\ 2<m$

①，②，③の共通部分より　$\mathbf{m>2}$



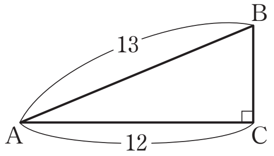

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第９講　三角比(1)

(1)　右図において，

$\sin A=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$，$\cos A=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{イウ}}}$，$\tan B=\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$

である．




(2)　$\theta$を鋭角とする．$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき　$\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}$，$\tan\theta=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である．

**解答例**

(1)　BC＝5 より

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\mathbf{\frac{5}{13}}\qquad \cos A=\frac{AC}{AB}=\mathbf{\frac{12}{13}}\qquad \tan B=\frac{AC}{BC}=\mathbf{\frac{12}{5}}$$

(2)　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$$
$$=1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{4}{5}$$

$\theta$は鋭角より　$\cos\theta>0$

よって　$\cos\theta=\mathbf{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第10講　三角比(2)

次の表の(ア)〜(コ)に当てはまるものを下の①〜⑨から選べ.

| $\theta$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | (ア) | (イ) | (ウ) | 0 |
| $\cos\theta$ | 1 | (エ) | (オ) | (カ) | (キ) | (ク) | (ケ) | (コ) | $-1$ |

① $0$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{\sqrt{2}}$　④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $1$

⑥ $-\frac{1}{2}$　⑦ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑧ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑨ $-1$

**解答例**

| $\theta$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos\theta$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |

(ア) ④　(イ) ③　(ウ) ②　(エ) ④　(オ) ③

(カ) ②　(キ) ①　(ク) ⑥　(ケ) ⑦　(コ) ⑧

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第11講　三角比(3)

(1)　△ABC において，外接円の半径を $R$ とする．$B=60°$，$C=75°$，$b=2\sqrt{6}$ のとき，
$a=$ ア ，$R=$ イ $\sqrt{\text{ウ}}$ である．

(2)　△ABC において　$a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{3}-1$，$C=45°$ のとき，$c=$ エ である．

(3)　△ABC において　$a=7$，$c=5$，$A=60°$ のとき，$b=$ オ である．また，△ABC の面積は カキ $\sqrt{\text{ク}}$ である．

(4)　$a=3$，$b=6$，$c=7$ である △ABC の面積は ケ $\sqrt{\text{コ}}$ である．

**解答例**

(1)　$A=180°-(60°+75°)=45°$

正弦定理より

$$\frac{a}{\sin 45°}=\frac{2\sqrt{6}}{\sin 60°}\qquad a=\frac{2\sqrt{6}}{\sin 60°}\cdot\sin 45°=2\sqrt{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{4}$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sin 60°}=2R\qquad R=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{\sin 60°}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\mathbf{2\sqrt{2}}$$

(2)　余弦定理より

$$c^2=(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2\cdot\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\cos 45°$$

$$=6+3-2\sqrt{3}+1-2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=4$$

$c>0$ より　$c=\mathbf{2}$

(3)　余弦定理より

$$7^2=b^2+5^2-2\cdot b\cdot 5\cdot\cos 60°$$

$$b^2-5b-24=0\qquad (b-8)(b+3)=0$$

$b>0$ より　$b=\mathbf{8}$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\sin 60°=\mathbf{10\sqrt{3}}$$

(4)　余弦定理より

$$\cos C=\frac{3^2+6^2-7^2}{2\cdot 3\cdot 6}=\frac{-4}{2\cdot 3\cdot 6}=-\frac{1}{9}$$

$$\sin^2 C=1-\cos^2 C=1-\left(-\frac{1}{9}\right)^2=\frac{80}{81}\qquad \sin C>0 \text{ より}\quad \sin C=\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

よって　$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot\frac{4\sqrt{5}}{9}=\mathbf{4\sqrt{5}}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

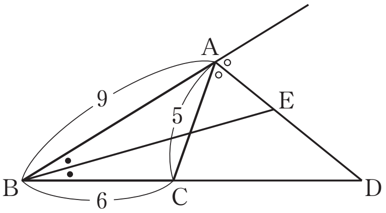
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第12講　平面図形(1)

(1)　3辺の長さが $x$，2，5である三角形が存在する $x$ の範囲は $\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}}$ である．

(2)　右図において，∠Aの外角の二等分線と直線BCとの交点をD，∠Bの二等分線と直線ADとの交点をEとする．このとき　$\text{CD}=\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，

AE：ED＝$\boxed{\text{カ}}$：$\boxed{\text{キ}}$である．




(3)　AB＝5，BC＝4，CA＝3の△ABCの内接円の中心をIとし，半径を $r$ とする．また，この内接円が辺BC，CA，ABと接する点をそれぞれD，E，Fとする．このとき BF＝$\boxed{\text{ク}}$，$r=\boxed{\text{ケ}}$である．

**解答例**

(1)　$5-2<x<5+2$　より　$\mathbf{3<x<7}$

(2)　外角の二等分線の性質より　AB：AC＝BD：CD＝9：5

CD＝$x$　とおくと　$(x+6):x=9:5$　　$9x=5(x+6)$　　$x=\dfrac{15}{2}$　　$\text{CD}=\mathbf{\dfrac{15}{2}}$

よって　$\text{BD}=6+\dfrac{15}{2}=\dfrac{27}{2}$

角の二等分線の性質より　AB：BD＝AE：ED＝$9:\dfrac{27}{2}=2:3$

よって　AE：ED＝**2**：**3**

(3)　BF＝BD＝$x$ とおくと

AF＝AE＝$5-x$，DC＝EC＝$4-x$

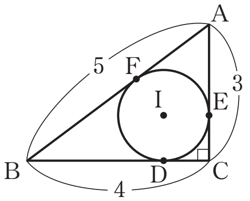
AC＝AE＋EC より　$3=(5-x)+(4-x)$　　$x=3$　　よって　BF＝**3**

また，$3^2+4^2=5^2$　より，△ABCは∠C＝90°の直角三角形である．

△ABC＝△IAB＋△IBC＋△ICA　より

$\dfrac{1}{2}\cdot\text{BC}\cdot\text{AC}=\dfrac{1}{2}r(\text{AB}+\text{BC}+\text{CA})$

よって　$\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot3=\dfrac{1}{2}r(5+4+3)$　　したがって　$\mathbf{r=1}$




(別解)　$3^2+4^2=5^2$　より，△ABCは∠C＝90°の直角三角形である．

よって　四角形CDIEは正方形より　CD＝CE＝$r$

このとき　AE＝AF＝$3-r$，BD＝BF＝$4-r$　であり

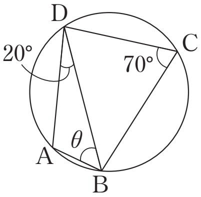
AB＝AF＋BF　より　$5=(3-r)+(4-r)$

よって　$r=1$　　したがって　BF＝$4-r=3$

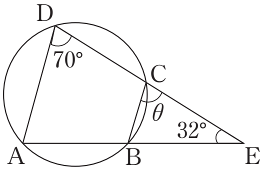
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 13 講　平面図形(2)

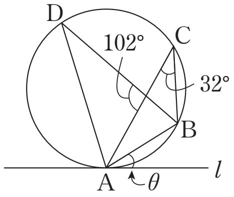
(1)　下の図において，$\theta$ を求めよ．ただし，(iii)において　$l$ は円の接線，点 A は接点である．

(i)



$\theta$＝ アイ °

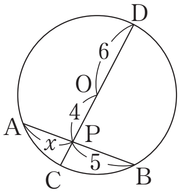
(ii)



$\theta$＝ ウエ °

(iii)


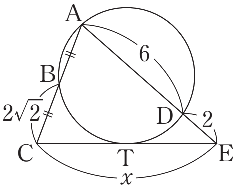

$\theta$＝ オカ °

(2)　下図において，$x$ を求めよ．

(i)



点Oは
円の中心

$x$＝ キ

(ii)


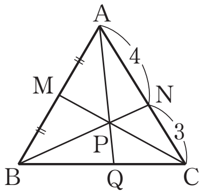

CE は円の接線
T は接点

$x$＝ ク

(3)　右図において

MP：PC＝ ケ ： コ ，

BQ：QC＝ サ ： シ 　である．




**解答例**

(1)　(i)　$\theta=\mathbf{50}°$　　(ii)　$\theta=\mathbf{78}°$　　(iii)　$\theta=\mathbf{32}°$

(2)　(i)　PC＝6－4＝2

方べきの定理より　PA・PB＝PC・PD　　　$x\cdot 5=2\cdot 10$　　よって　　$x=\mathbf{4}$

(ii)　方べきの定理より

$CT^2=CB\cdot CA$　　つまり　$CT^2=2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=16$　　CT＝4

$ET^2=ED\cdot EA$　　つまり　$ET^2=2\cdot 8=16$　　ET＝4

したがって　$x=CT+ET=\mathbf{8}$

(3)　メネラウスの定理より　$\dfrac{AB}{BM}\cdot\dfrac{MP}{PC}\cdot\dfrac{CN}{NA}=1$

つまり　$\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{MP}{PC}\cdot\dfrac{3}{4}=1$　　$\dfrac{MP}{PC}=\dfrac{2}{3}$　　よって　MP：PC＝**2：3**

チェバの定理より　$\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CN}{NA}=1$

つまり　$\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{3}{4}=1$　　$\dfrac{BQ}{QC}=\dfrac{4}{3}$　　よって　BQ：QC＝**4：3**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第14講　場合の数(1)

(1)　1から100までの整数のうち，2または3の倍数は **アイ** 個ある．

(2)　大小2個のさいころを投げるとき，目の和が4の倍数にならないのは **ウエ** 通りある．

(3)　男子3人，女子2人が1列に並ぶとき，両端が男子である並び方は **オカ** 通り，女子2人が隣り合う並び方は **キク** 通り，男女が交互に並ぶ並び方は **ケコ** 通りである．

**解答例**

(1)　1から100までの整数全体の集合を全体集合 $U$ とし，2の倍数全体の集合を $A$，3の倍数全体の集合を $B$ とすると，2かつ3の倍数，つまり6の倍数全体の集合は　$A\cap B$ で表され，2または3の倍数全体の集合は　$A\cup B$ で表される．

　$100\div 2=50$　より　$n(A)=50$

　$100\div 3=33$ あまり 1　より　$n(B)=33$

　$100\div 6=16$ あまり 4　より　$n(A\cap B)=16$

よって求める個数は　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=50+33-16=\mathbf{67}$（個）

(2)　2個のさいころの目の出方は　$6\times 6=36$（通り）

2個のさいころの出目を　(大きいさいころの出目，小さいさいころの出目)　と表す．

目の和が4の倍数になるのは，和が4または8または12になるときである．

(i)　目の和が4になるのは　(1，3)，(2，2)，(3，1) の3通り

(ii)　目の和が8になるのは　(2，6)，(3，5)，(4，4)，(5，3)，(6，2) の5通り

(iii)　目の和が12になるのは　(6，6) の1通り

(i)，(ii)，(iii)はいずれも同時におこらない．

よって目の和が4の倍数になるのは　$3+5+1=9$（通り）

したがって目の和が4の倍数にならないのは　$36-9=\mathbf{27}$（通り）ある．

(3)　両端が男子である並び方について

　男子3人のうち両端になる2人の並び方が　${}_3\mathrm{P}_2$ 通り，残り3人の並び方が　$3!$ 通り

よって　${}_3\mathrm{P}_2\times 3!=3\cdot 2\times 3\cdot 2\cdot 1=\mathbf{36}$（通り）

女子2人が隣り合う並び方について

　女子の並び方が　$2!$ 通り

　女子2人を1組と考え，この1組と男子3人を並べる方法は　$4!$ 通り

よって　$2!\times 4!=2\cdot 1\times 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=2\times 24=\mathbf{48}$（通り）

男女が交互に並ぶ並び方について

　男子3人の並び方が　$3!$ 通り

　この3人の間2カ所に女子2人を並べる方法は　${}_2\mathrm{P}_2=2!$（通り）

よって　$3!\times 2!=3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1=6\times 2=\mathbf{12}$（通り）

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

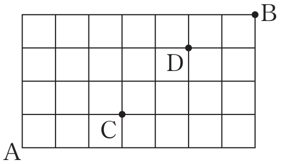
# 第15講　場合の数(2)

(1)　3人の選手が4つの野球チームA，B，C，Dに入るとき，その入り方は **アイ** 通りある．

(2)　$a$，$b$，$c$，$d$，$e$，$f$ の6色の玉がある．これを円形に並べるとき，$a$，$b$，$c$ が隣り合う並べ方は **ウエ** 通りである．

(3)　5個の数字1，1，1，2，3を使って5桁の整数を作るとき，奇数は **オカ** 個できる．また，2，3の順に並ぶ並び方は **キク** 個できる．

(4)　右図のように，格子状の道路がある．AからBに至る最短経路を考えるとき，CまたはDを通るものは **ケコサ** 通りである．




**解答例**

(1)　選手それぞれについて，チームの選び方は4通りある．

よって　$4^3=4\times4\times4=\mathbf{64}$（通り）

(2)　$a$，$b$，$c$ を1組とした4つのものの円順列で，$a$，$b$，$c$ の並び方が3!通りより

$a$，$b$，$c$ が隣り合う並べ方は　$(4-1)!\times3!=3!\times3!=6\times6=\mathbf{36}$（通り）

(3)　5個の数字の並べ方の総数は　$\dfrac{5!}{3!}=20$（通り）

このうち偶数となるのは一の位が2のときで，残りの位の並べ方は　$\dfrac{4!}{3!}=4$（通り）

よって奇数となるのは　$20-4=\mathbf{16}$（個）

また，2，3の順に並ぶ並び方は，○，○，1，1，1の5つの数字を並べ，2個の○を順に2，3とすればよい．よって　$\dfrac{5!}{2!3!}=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=\mathbf{10}$（個）

(4)　AからBに至る最短経路のうち

Cを通るものは　$\dfrac{4!}{3!1!}\times\dfrac{7!}{4!3!}=4\times\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=140$（通り）

Dを通るものは　$\dfrac{8!}{5!3!}\times\dfrac{3!}{2!1!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\times3=168$（通り）

C，Dを両方とも通るものは　$\dfrac{4!}{3!1!}\times\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{3!}{2!1!}=4\times\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times3=72$（通り）

よって，CまたはDを通るものは　$140+168-72=\mathbf{236}$（通り）

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 16 講　場合の数(3)

(1)　1 枚のコインを 7 回投げるとき，表が 5 回出る場合は **アイ** 通りある.

(2)　10 個の異なる色の玉を 6 個, 4 個の 2 組に分ける方法は **ウエオ** 通りであり, 5 個, 5 個の 2 組に分ける方法は **カキク** 通りである.

(3)　区別のつかない 8 個の球を，箱 A，B，C，D に分ける方法は **ケコサ** 通りある. ただし，空箱ができてもよいものとする.

**解答例**

(1)　7 回中，表が出る 5 回を選ぶ方法で

$${}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=\mathbf{21}\ (\text{通り})$$

(2)　10 個の異なる色の玉を 6 個，4 個の 2 組に分ける方法は

$${}_{10}C_6\times{}_4C_4={}_{10}C_4\times1=\mathbf{210}\ (\text{通り})$$

また，5 個ずつに分ける 2 組を A，B とすると，A，B に分ける方法が ${}_{10}C_5\times1$ 通り

A，B の区別をなくすと，同じ分け方が 2! 通りある.

よって 5 個ずつ 2 組に分ける方法は $\dfrac{{}_{10}C_5\times1}{2!}=\mathbf{126}$ (通り)

(3)　8 個の○と 3 本の仕切り｜の順列を求め，｜で分けられた 3 カ所の○の個数を，左から順に箱 A，B，C，D に入れる球の個数とすればよい.

よって求める場合の数は $\dfrac{11!}{8!3!}={}_{11}C_3=\dfrac{11\cdot10\cdot9}{3\cdot2\cdot1}=\mathbf{165}$ (通り)

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第17講　確率(1)

(1)　さいころを3回投げるとき，目の和が7になる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である．

(2)　赤球4個，白球3個，青球2個，黒球1個が入った袋から同時に3個の球を取り出すとき，色がすべて異なる確率は $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$，青球が少なくとも1つ含まれる確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$ である．

(3)　ジョーカーを除く52枚のトランプから1枚抜き取り，カードを見てからもとに戻すことを3回行うとき，3回目に初めてスペードが出る確率は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}$ である．

**解答例**

(1)　3回の目の出方は $6^3$ 通り．　目の和が7になるのは，目の組合せが

(1，1，5) のとき　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）　　(1，2，4) のとき　$3!=6$（通り）

(1，3，3) のとき　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）　　(2，2，3) のとき　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）　のときで

全部で $3+6+3+3=15$（通り）　　よって求める確率は　$\dfrac{15}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{72}}$

(2)　10個の球から3個を取り出す場合の数は　${}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=10\cdot3\cdot4$（通り）

3個の球の色がすべて異なるのは，取り出す球の色が

(i)　赤，白，青　　(ii)　赤，白，黒　　(iii)　赤，青，黒　　(iv)　白，青，黒

のときである．

よって求める確率は

$$\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_{10}C_3}+\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_{10}C_3}+\frac{{}_4C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_{10}C_3}+\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_{10}C_3}$$

$$=\frac{24+12+8+6}{10\cdot3\cdot4}=\frac{50}{10\cdot3\cdot4}=\mathbf{\frac{5}{12}}$$

「青球が少なくとも1つ含まれる」という事象は，「青球が1つも含まれない」という事象の余事象である．青球が1つも含まれないのは，青球2個を除く残り8個から3個取り出したときで，その確率は　$\dfrac{{}_8C_3}{{}_{10}C_3}=\dfrac{\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}}{{}_{10}C_3}=\dfrac{4\cdot7\cdot2}{10\cdot3\cdot4}=\dfrac{7}{15}$

よって求める確率は　$1-\dfrac{7}{15}=\mathbf{\dfrac{8}{15}}$

(3)　1，2回目にスペード以外が出て，3回目にスペードが出るときで，その確率は

$$\left(1-\frac{13}{52}\right)^2\times\frac{13}{52}=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{9}{64}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 18 講　確率(2)

(1)　引き分けのないゲームで A が B に勝つ確率は $\frac{2}{3}$ である．A と B がゲームをし，先に 3 ゲーム勝った方を優勝とする．このとき，4 ゲーム目で A が優勝する確率は $\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である．

(2)　硬貨を投げて表が出たら前に 2 m，裏が出たら後ろに 1 m 進む．硬貨を 6 回投げたとき，前に 9 m 以上進んでいる確率は $\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$ である．

(3)　10 本のくじの中に当たりが 2 本ある．引いたくじをもとに戻さず A，B，C の 3 人がこの順に 1 本ずつ引くとき，B が当たる確率は $\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$，C が当たる確率は $\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である．

**解答例**

(1)　4 ゲーム目で A が優勝するのは，3 ゲーム目までに A が 2 勝 1 敗で，4 ゲーム目で A が勝つ場合である．よって求める確率は $_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}=3\times\frac{2^3}{3^4}=\mathbf{\frac{8}{27}}$

(2)　硬貨を 1 回投げて，表が出る確率，裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ である．

表の出る回数を $x$ 回 $(0\leqq x\leqq 6)$ とすると

$2x+(-1)\cdot(6-x)\geqq 9$　より　$x\geqq 5$　　つまり　$x=5,\ 6$

よって求める確率は　$_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=\mathbf{\frac{7}{64}}$

(3)　B が当たるのは

(i)　A がはずれ，B が当たる

(ii)　A，B ともに当たる

の 2 つの場合があり，これらの事象は互いに排反である．

よってその確率は　$\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{8}{45}+\frac{1}{45}=\frac{9}{45}=\mathbf{\frac{1}{5}}$

C が当たるのは

(i)　A が当たり，B がはずれ，C が当たる

(ii)　A がはずれ，B，C が当たる

(iii)　A，B がはずれ，C が当たる

の 3 つの場合があり，これらの事象は互いに排反である．

よってその確率は

$$\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{45}+\frac{1}{45}+\frac{7}{45}=\frac{9}{45}=\mathbf{\frac{1}{5}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第19講　図形と方程式(1)

(1)　2点A(5，−2)，B(−1，4) について，線分ABを2：1に内分する点の座標は

( ア ，イ ) である．

(2)　直線 $3x-y-7=0$ に垂直で，点 (−2，4) を通る直線の方程式は

$x+$ ウ $y-$ エオ $=0$ である．

(3)　3点A(−4，3)，B(−1，2)，C(3，−1) について，BC＝ カ であり，直線BCの方程式は キ $x+$ ク $y-$ ケ $=0$ である．よって，点Aと直線BCの距離は コ である．したがって，△ABCの面積は $\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}$ である．

**解答例**

(1)　求める点の座標は $\left(\dfrac{1\cdot5+2\cdot(-1)}{2+1},\ \dfrac{1\cdot(-2)+2\cdot4}{2+1}\right)=\mathbf{(1,\ 2)}$

(2)　直線 $3x-y-7=0$ の傾きは3より　求める直線の傾きは　$-\dfrac{1}{3}$

したがって，求める直線の方程式は　$y=-\dfrac{1}{3}(x+2)+4=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}$

つまり　$\boldsymbol{x+3y-10=0}$

(3)　$\mathrm{BC}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(-1-2)^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\mathbf{5}$

また，直線BCの傾きは　$\dfrac{-1-2}{3-(-1)}=-\dfrac{3}{4}$ より

直線BCの方程式は　$y=-\dfrac{3}{4}(x+1)+2=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$

つまり　$\boldsymbol{3x+4y-5=0}$

点Aと直線BCとの距離 $d$ は　$d=\dfrac{|3\cdot(-4)+4\cdot3-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|-5|}{5}=\dfrac{5}{5}=\mathbf{1}$

したがって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot1=\mathbf{\dfrac{5}{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 20 講　図形と方程式(2)

(1)　円 $x^2+y^2+4x-6y=0$ と中心が同じで，点 (2, 1) を通る円の方程式は

$(x+$ ア $)^2+(y-$ イ $)^2=$ ウエ　である.

(2)　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=mx+2$ が共有点をもつときの定数 $m$ の値の範囲は

$m\leqq-\sqrt{\text{オ}}$, $\sqrt{\text{オ}}\leqq m$　である.

(3)　点 (4, 2) を通り，円 $x^2+y^2=4$ に接する直線の方程式は

$y=$ カ , キ $x-$ ク $y-$ ケコ $=0$　である.

**解答例**

(1)　$x^2+y^2+4x-6y=0$　より　$(x+2)^2+(y-3)^2=13$

よって求める円の中心は　$(-2,\ 3)$

半径 $r$ はこの中心と (2, 1) の距離で　$r=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

したがって，求める円の方程式は　$(x+\mathbf{2})^2+(y-\mathbf{3})^2=\mathbf{20}$

(2)　円 $x^2+y^2=1$ の中心 (0, 0) と直線 $y=mx+2$　つまり　$mx-y+2=0$ の距離 $d$ は

$$d=\frac{|2|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$$

円と直線が共有点をもつためには　$d\leqq$(円の半径)　より

$$\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}\leqq1 \qquad \sqrt{m^2+1}\geqq2$$

両辺を 2 乗して　$m^2+1\geqq4$　　$m^2\geqq3$　　　よって　$m\leqq-\sqrt{\mathbf{3}}$, $\sqrt{3}\leqq m$

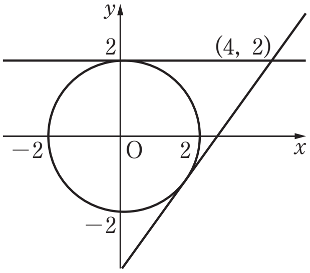
(3)　点 (4, 2) を通り $x$ 軸と垂直な直線 $x=4$ は

円 $x^2+y^2=4$ の接線ではない.

よって求める接線を　$y=m(x-4)+2$　……①

つまり　$mx-y-4m+2=0$　とおける.

この直線と円の中心 (0, 0) との距離が半径 2 と等しければよい.




よって　$\dfrac{|-4m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$　　$|4m-2|=2\sqrt{m^2+1}$

両辺を 2 乗して　$(4m-2)^2=4(m^2+1)$　　$3m^2-4m=0$　　よって　$m=0,\ \dfrac{4}{3}$

$m=0$ のとき　①より　$y=2$　　　$m=\dfrac{4}{3}$ のとき　①より　$y=\dfrac{4}{3}(x-4)+2$

したがって，求める接線の方程式は　$y=\mathbf{2}$, $\mathbf{4}x-\mathbf{3}y-\mathbf{10}=0$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第21講　図形と方程式(3)

(1)　2点A(0, 2)，B(4, 0)から等距離にある点Pの軌跡は，直線 $y=$ **ア** $x-$ **イ** である．

(2)　放物線 $y=x^2-2(a+1)x+3a^2-a$ の頂点Pが描く軌跡は，放物線 $y=$ **ウ** $x^2-$ **エ** $x+$ **オ** である．

(3)　$x$，$y$ が4つの不等式 $x\geqq0$，$y\geqq0$，$2x+y\leqq5$，$x+3y\leqq6$ を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値は $\dfrac{\text{カキ}}{\text{ク}}$，最小値は **ケ** である．

**解答例**

(1)　AP＝BP　より　$AP^2=BP^2$

よって　$x^2+(y-2)^2=(x-4)^2+y^2$　　　$x^2+y^2-4y+4=x^2-8x+16+y^2$

$2x-y-3=0$

したがって，求める軌跡は　直線 $y=\mathbf{2x-3}$　である．

(2)　$y=x^2-2(a+1)x+3a^2-a=\{x-(a+1)\}^2+2a^2-3a-1$

頂点の座標は　$(a+1,\ 2a^2-3a-1)$

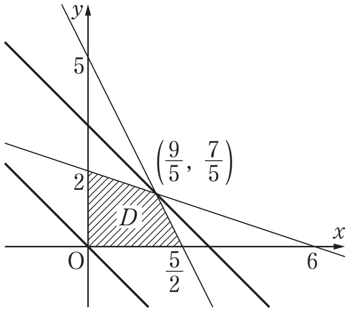
よって頂点Pの座標を $(x,\ y)$ とおくと　$x=a+1$　……①，$y=2a^2-3a-1$　……②

①より　$a=x-1$　これを②に代入して

$y=2(x-1)^2-3(x-1)-1=2x^2-7x+4$

よって求める点Pの軌跡は　放物線 $y=\mathbf{2x^2-7x+4}$　である．

(3)　与えられた連立不等式の領域を $D$ とすると，




領域 $D$ は右図斜線部．境界含む．

$x+y=k$　……①　とおく．

①は $y=-x+k$ より，傾き $-1$ の直線を表す．

この直線①が領域 $D$ と共有点をもつときの

$y$ 切片 $k$ の最大値と最小値を求める．

直線①が $\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$ を通るとき $k$ は最大で，

その値は①より　$k=\dfrac{16}{5}$

直線①が $(0,\ 0)$ を通るとき $k$ は最小で，その値は①より　$k=0$

したがって，$x+y$ は

$x=\dfrac{9}{5}$，$y=\dfrac{7}{5}$ のとき　最大値 $\mathbf{\dfrac{16}{5}}$　　　$x=0$，$y=0$ のとき　最小値 $\mathbf{0}$ をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第22講　三角関数(1)

(1)　半径10，中心角 $\frac{\pi}{5}$ の扇形の弧の長さは [ア] $\pi$，面積は [イウ] $\pi$ である．

(2)　$\theta$ の動径が第3象限にあり，$\sin\theta=-\frac{1}{4}$ のとき，$\cos\theta=\frac{[エ]\sqrt{[オカ]}}{4}$ である．

(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け．

(i)　$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$\theta=\frac{[キ]}{[ク]}\pi$，$\frac{[ケ]}{[ク]}\pi$　（[キ] ＜ [ケ] とする）

(ii)　$\cos\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{[コ]}$，$\frac{[サシ]}{[コ]}\pi<\theta<2\pi$

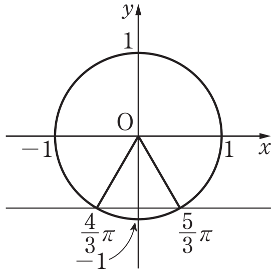
**解答例**

(1)　弧の長さは　$10\cdot\frac{\pi}{5}=\mathbf{2}\pi$　　面積は　$\frac{1}{2}\cdot10^2\cdot\frac{\pi}{5}=\mathbf{10}\pi$

(2)　$\theta$ の動径が第3象限にあることより，$\cos\theta<0$

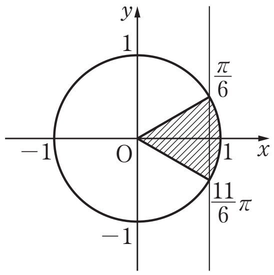
$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$　　よって　$\cos\theta=\mathbf{-}\frac{\sqrt{\mathbf{15}}}{4}$

(3)　(i)




$\theta=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\pi$，$\frac{\mathbf{5}}{3}\pi$

(ii)




$0\leqq\theta<\frac{\pi}{\mathbf{6}}$，$\frac{\mathbf{11}}{6}\pi<\theta<2\pi$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第23講　三角関数(2)

(1)　$y=\sin\frac{2}{3}\theta$ の周期は $\boxed{\text{ア}}\pi$ である．また $y=\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\cos 2\theta$ のグラフを $\theta$ 軸方向に $\frac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}$ 平行移動したものである．

(2)　$\frac{7}{12}\pi=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ であることより，$\sin\frac{7}{12}\pi=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$

$\cos\frac{7}{12}\pi=\frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}-\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

ただし，$\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{エ}}$ とする．

(3)　$y=(2+\sqrt{3})x$，$y=x$ のなす鋭角 $\theta$ は $\theta=\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

**解答例**

(1)　$y=\sin\frac{2}{3}\theta$ の周期は $2\pi\times\frac{3}{2}=\mathbf{3}\pi$ である．

また，$y=\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ より，この関数のグラフは $y=\cos 2\theta$ のグラフを

$\theta$ 軸方向に $\frac{\pi}{\mathbf{6}}$ 平行移動したものである．

(2)　$\sin\frac{7}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}+\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{4}}$

$\cos\frac{7}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

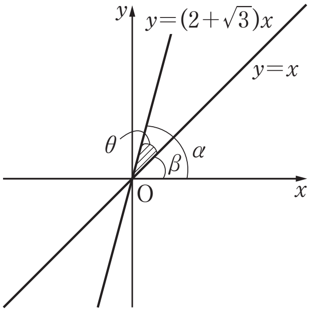
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}-\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{4}}$

(3)　$y=(2+\sqrt{3})x$，$y=x$ と $x$ 軸の正の向きがなす角をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とすると，$\tan\alpha=2+\sqrt{3}$，$\tan\beta=1$

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{(2+\sqrt{3})-1}{1+(2+\sqrt{3})\cdot 1}$

$=\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta$ は鋭角より　$\theta=\frac{\pi}{\mathbf{6}}$




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 24 講　三角関数(3)

(1)　$0<\theta<\pi$，$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\sin 2\theta=\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$，$\cos 2\theta=-\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{ウ}}$，

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\boxed{オ}}{\sqrt{\boxed{カ}}}$ である．

(2)　関数 $y=\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{6}\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ の最大値は $\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$，最小値は $\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}$ である．

**解答例**

(1)　$0<\theta<\pi$ より　$\sin\theta>0$　　よって　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{4\sqrt{5}}{9}}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=-\mathbf{\frac{1}{9}}$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1-\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{6}$$

$0<\theta<\pi$ より　$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$　　よって　$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$　より　$\sin\dfrac{\theta}{2}=\mathbf{\dfrac{1}{\sqrt{6}}}$

(2)　$\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$ より

$$y=\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{6}\cos\theta=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\cos\theta\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}-\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{2}{3}\pi$

よって　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$　　つまり　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき　最大値　$2\sqrt{2}\times 1=\mathbf{2\sqrt{2}}$

$\theta-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}$　　つまり　$\theta=0$ のとき　最小値　$2\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\mathbf{-\sqrt{6}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 高1・2　スタンダードレベル数学ⅠAⅡBを受講する皆さんへ

ようこそ，『スタディサプリ』の数学の講座へ！　この講座は

**「数学ⅠAⅡBをはじめから学びたい」**

という人にピッタリの講座です。

**高1・高2のみなさん**はもちろん，**それ以外の学年の人**も大歓迎です。

数学ⅠAⅡBを「こうしたい！」という思いは，人によって様々かと思います。

- **学校で学んだことをしっかり定着させたい！**
- **理解が不十分だったところを取り戻したい！**
- **ある分野で，自分が詰まったところがどこなのかを知りたい！**

それぞれの思いをかなえるために用意されたのが以下です。

- **『テキスト』**　…「講義問題」「練習問題」
- **『講義動画（授業）』**
- **『テキスト 解答集』**…「講義問題の解答・解説」「練習問題の解答・解説」

## 予習は必要なし！　「講義動画」で一から説明します！

講義問題には「解答・解説」も用意してあります。**「板書で省略された途中計算がわからない」ということはありません。**また，「練習問題」とその解答・解説を用意してありますので，**「授業を受けっぱなし」「せっかく練習問題を解いたのに答えしかない」といった問題をすべて解決！**　後ほど詳しく説明しますが，しっかり活用すれば，学校の授業や自分の勉強がより楽しくなることでしょう。**わかれば，面白い。面白ければ，先が知りたくなる。**当然ですね。

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。直接会うことはなかなかできませんが，みなさんが真剣に動画を視聴すれば，まるで目の前に先生がいるような錯覚すら覚えることでしょう。なぜなら，先生はいつでも君たち一人ひとりが真剣に授業を受けている姿をカメラの向こうに思い浮かべながら授業しているのですから。

さぁ，そろそろ時間です。**いつでも，どこでも，何度でも**。ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

**山内　恵介**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# ＜後期　目次＞


| 講 | タイトル | 応用問題（ハイレベルテキスト）※ |
|---|---|---|
| 第 25 講 | 指数関数・対数関数(1) | 第 25 講 1 2 3 |
| 第 26 講 | 指数関数・対数関数(2) | 第 26 講 1 2 3 |
| 第 27 講 | 指数関数・対数関数(3) | 第 27 講 1 2 3 |
| 第 28 講 | 式と証明(1) | 第 16 講 1 |
| 第 29 講 | 式と証明(2) | 第 16 講 2 |
| 第 30 講 | 式と証明(3)・複素数と方程式(1) | 第 16 講 3 |
| 第 31 講 | 複素数と方程式(2) | 第 17 講 1 2 3 |
| 第 32 講 | 微分法(1) | 第 28 講 1 2 3 |
| 第 33 講 | 微分法(2) | 第 29 講 1 2 3 |
| 第 34 講 | 微分法(3)・積分法(1) | 第 30 講 1 2 3・第 31 講 1 2 3 |
| 第 35 講 | 積分法(2) | 第 32 講 1 2 3・第 33 講 1 2 3 |
| 第 36 講 | 数列(1) | 第 34 講 1 2 3 |
| 第 37 講 | 数列(2) | 第 35 講 1 2 3 |
| 第 38 講 | 数列(3) | 第 36 講 1 2 3・第 37 講 1 2 3 |
| 第 39 講 | 数列(4) | 第 38 講 1 2 3 |
| 第 40 講 | 平面ベクトル(1) | 第 39 講 1 3(1) |
| 第 41 講 | 平面ベクトル(2) | 第 39 講 2 3(2)・第 40 講 1 2 |
| 第 42 講 | 平面ベクトル(3) | 第 40 講 3・第 41 講 1 2 3 |
| 第 43 講 | 平面ベクトル(4) | 第 42 講 1 2 3 |
| 第 44 講 | 平面ベクトル(5) | 第 43 講 1 2 3 |
| 第 45 講 | 空間ベクトル(1) | 第 44 講 1 2 3 |
| 第 46 講 | 空間ベクトル(2) | 第 45 講 1 2 3 |
| 第 47 講 | 空間ベクトル(3) | 第 46 講 1 2 3 |
| 第 48 講 | 整数の性質 | 第 47 講 1 2 3・第 48 講 1 2 3 |
| 第 49 講 | データの分析(1) | なし |
| 第 50 講 | データの分析(2) | なし |


※「応用問題（ハイレベルテキスト）」は，スタディサプリ「高１・２　ハイレベル数学ⅠAⅡB」の対応する講を表しています。さらに理解を深めたい，応用的な問題にチャレンジしたい人はこちらに進んでください。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# ＜講座の受講の仕方＞

ここでは，効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答冊子」に分かれています。この３つを効果的に使い，実力を伸ばしていきましょう。

## ①　講義問題について（テキスト）

講義問題は**「例題」**と**「類題」**で構成されています。

**「例題」**…　各分野の基礎的な内容を理解するために必要な問題です

**「類題」**…　例題で得た知識を練習するための問題です

この分野が未習，または理解が不十分でもまったく問題ありません。また，予習は必要ありません。

## ②　講義について（動画・解答冊子）

テキストと筆記用具を手元に，動画を再生してください。そして，真剣に視聴して，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。主な流れは次の(1)〜(3)です。

(1)　まず**「例題」**を通じて，この分野に必要な用語・知識・公式の説明があります。特に大事なポイントは「Point Pickup」の枠に書き，あとで復習できるようにしておくとよいでしょう。

(2)　例題を視聴したら，一度画面を止め，**「類題」**にチャレンジしてみましょう。例題の解法を参考に，自力で解いてみてください。

(3)　類題を解き終えたら，動画の続きを再生してください。動画を見て類題の解法が合っているかを確かめます。最後の答えだけでなく，途中の進め方についてもチェックしてください。

「例題の視聴」→「類題を解く」→「類題の視聴」が１セットです。時間がない時は１日１セット，時間がある時は１講まるごとなど，工夫して進めてください。

大事なのは

- **「集中力」**
- **「集中しよう」「何かをこの先生から得てやる」という「気持ち」**
- **数学ができるようになりたいという「思い」**

をもって視聴することです。

動画に慣れていない，また数学が苦手な人は，最初は「授業が早い！」と感じるかもしれません。この講座はいつでも画面を止められます。必要に応じて戻ってください。そのうち，このペースに慣れていくでしょう。

そして

- **「やっぱり自分はできない」は厳禁！**

です。あきらめず何度もチャレンジすること。必ずできるようになりますよ。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，画面の文字が見えづらいときは，「**解答冊子**」に途中計算が掲載してあります。スムーズに視聴を進めるために役立ててください。

## ③　講義問題の復習について（テキスト・解答冊子）

視聴が終わったら，「例題」「Point Pickup」「類題」を見て

- **この講から何を学んだか**
- **この講を受講して何ができるようになったか**

を思い浮かべてみてください。時間があれば「例題」「類題」をもう一度解き直してみましょう。もし解法が全然思いつかない，忘れた，という場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします。

- **「復習したときが，真の学習の完成」**

です。

## ④　練習問題について（テキスト・解答冊子）

①〜③が終わると，自分が本当にできるようになったかを確かめたくなるでしょう。「**練習問題**」が各講に用意してあります。講義の問題に関連する問題です。この講で学んだことを参考に自力で解いてみましょう。

- **「自分はちゃんと理解できているのか」**
- **「一見新しい問題に見えても，今までの知識を使えるか」**

それをこの練習問題で試してみてください。解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。より理解が深まります。

---

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まるでしょう。そして大切なのは

- **ペースを作り，守る**

ことです。週１回，１時間。どこの曜日のどの時間帯にやるかを決め，それを守ること。学校に通う，予備校に通うのと同じように，「スタディサプリ」を受ける時間。数学に本気で向きあう時間。これを確保してください。学校の宿題があろうと，部活で疲労していようと，ペースを守ること。それが「実力向上」と「自信」になります。

そしてさらに先が知りたくなった人は，「**高１・２　ハイレベル数学ⅠAⅡB**」に進んでみてください。どの講を見ればよいのかは，「目次」に載っています。そこには，さらに深い，数学の本質が待っています。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 25 講　指数関数・対数関数(1)

**例題 25 － 1**

次の式を計算せよ．

(1)　$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16}$　　(2)　$\sqrt[3]{3} \times \sqrt{27} \div \sqrt[6]{243}$

(3)　$\sqrt[4]{6} \div \sqrt{6} \times \sqrt[4]{12}$

**【Point Pickup】**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 25 ー 1**

次の式を計算せよ．

(1)　$\sqrt[3]{54}\times\sqrt[3]{-2}\times\sqrt[3]{16}$

(2)　$\sqrt[3]{\sqrt{64}}\div\sqrt{16}\times\sqrt[3]{8}$

(3)　$\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 25 ー 2**

次の関数のグラフをかけ.

(1)　$y=2^x$

(2)　$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

(3)　$y=2^x+1$

(4)　$y=2^{x-1}$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 25 － 2**

次の関数のグラフをかけ.

(1)　$y=3^x$　　(2)　$y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$　　(3)　$y=3^x-1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 25 － 3**

次の方程式を解け.

(1)　$2^x=64$　　(2)　$9^{x+1}=\dfrac{1}{27}$　　(3)　$2^{2x}-2^{x+1}-8=0$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 25 ー 3**

次の方程式を解け.

(1)　$\dfrac{1}{3^x}=27$　　(2)　$9^x-4\cdot 3^{x+1}+27=0$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 25 − 4**

(1)　3 つの数 $\sqrt{2}$，$\sqrt[4]{8}$，$\sqrt[8]{32}$ の大小を不等号を用いて表せ.

(2)　次の不等式を解け.

(ア)　$2^x > \dfrac{1}{8}$　　　(イ)　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^x > \dfrac{1}{125}$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 25 ー 4**

(1)　3 つの数 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$，1，$\frac{1}{9}$ を小さい順に並べよ．

(2)　次の不等式を解け．

(ア)　$3^{x-1} < 243$　　(イ)　$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} < \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 25 講　指数関数・対数関数(1)

(1)　次の式を計算せよ.

(i)　$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{54}=$ [ア]　　(ii)　$\sqrt[3]{4}\times\sqrt{3}\div\sqrt[6]{6}\div\sqrt[3]{3}=\sqrt{\boxed{イ}}$

(2)　次の 3 つの数①, ②, ③を小さい順に並べると, [ウ], [エ], [オ] である.

①　$\sqrt[3]{16}$　　②　2　　③　$\sqrt[4]{4}$

(3)　次の方程式・不等式を解け.

(i)　$4^x-3\cdot 2^{x+1}-16=0$　　$x=$ [カ]

(ii)　$\dfrac{1}{\sqrt{27}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<9$　　[キク] $<x<\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 26 講　指数関数・対数関数(2)

**例題 26 − 1**

次の対数の値を求めよ.

(1)　$\log_2 16$　　(2)　$\log_3 \dfrac{1}{27}$　　(3)　$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{32}$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 26 － 1**

次の対数の値を求めよ.

(1)　$\log_5 125$　　(2)　$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$　　(3)　$\log_7 1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 26 － 2**

次の式を簡単にせよ.

(1)　$\log_6 3 + \log_6 12$

(2)　$\log_2 \sqrt{3} - \log_2 \sqrt{6} + \frac{1}{4} \log_2 4$

(3)　$\log_2 3 \cdot \log_3 4$

(4)　$(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 16 + \log_9 4)$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 26 ー 2**

次の対数の値を求めよ.

(1)　$2\log_2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log_2 3+\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　(2)　$(\log_2 3+\log_8 27)(\log_3 4+\log_{81} 4)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 26 − 3**

次の関数のグラフをかけ.

(1)　$y=\log_2 x$

(2)　$y=\log_{\frac{1}{2}} x$

(3)　$y=\log_2 x+1$

(4)　$y=\log_2(x-1)$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 26 ー 3**

次の関数のグラフをかけ.

(1)　$y=\log_3 x$　(2)　$y=\log_{\frac{2}{3}} x$　(3)　$y=\log_3(x+1)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 26 － 4**

次の方程式・不等式を解け.

(1)　$\log_2 x=3$　　(2)　$(\log_2 x)^2+\log_2 x^2-3=0$

(3)　$\log_2 x>-1$　　(4)　$\log_{\frac{1}{3}} x\leqq 2$

**【Point Pickup】**


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 26 ー 4**

次の方程式・不等式を解け.

(1)　$(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 = 0$　　(2)　$\log_{\frac{1}{3}} x \leqq 3$　　(3)　$\log_5 x < \dfrac{1}{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 26 講　指数関数・対数関数(2)

(1)　次の式を計算せよ．

(i)　$\log_2 30 - \log_2 15\sqrt{2} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$

(ii)　$2\log_3\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\log_3 6 + \log_3\dfrac{\sqrt{6}}{3} = \boxed{\text{ウ}}$

(iii)　$(\log_3 5 + \log_9 25)(\log_5 9 + \log_{25} 3) = \boxed{\text{エ}}$

(2)　次の方程式・不等式を解け．

(i)　$2(\log_2 x)^2 + 3\log_2 x = 2$　　$x = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\ \sqrt{\boxed{\text{キ}}}$

(ii)　$\log_{\frac{1}{3}} x > -2$　　$\boxed{\text{ク}} < x < \boxed{\text{ケ}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 27 講　指数関数・対数関数(3)

**例題 27 ー 1**

$\log_{10}2=0.3010$　とする．$\log_{10}4$，$\log_{10}5$ の値を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 27 ー 1**

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$　とする．次の表をうめよ．

| $x$ | 1 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\log_{10}x$ | | | | | | | |


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 27 ー 2**

(1)　次の表をうめよ.

| $x$ | 1 | 10 | 100 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\log_{10}x$ | | | | | |

(2)　$10^{2.5}$ は整数部分が何桁の数か.

(3)　$2^{50}$ は何桁の数か．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする.

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 27 ー 2**

$6^{30}$ は何桁の数か．ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 27 ー 3**

(1)　次の表をうめよ.

| $x$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 |
|---|---|---|---|---|
| $\log_{10}x$ | | | | |

(2)　$10^{-2.5}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか.

(3)　$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{30}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする.

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 27 ー 3**

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^{30}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 27 ー 4**

(1)　$\left(\dfrac{5}{3}\right)^n > 3000$ を満たす最小の自然数 $n$ を求めよ．ただし $\log_{10}2 = 0.3010$, $\log_{10}3 = 0.4771$ とする．

(2)　$3^x = 5^y = \sqrt{15}$ のとき，$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ の値を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 27 ー 4**

(1)　$\left(\frac{5}{4}\right)^n < 6000$ を満たす最大の自然数 $n$ を求めよ．ただし $\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ とする．

(2)　$2^x = 3^y = 6\sqrt{6}$ のとき，$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 27 講　指数関数・対数関数(3)

(1)　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．$12^{40}$ は アイ 桁の整数であり，$0.2^{40}$ は小数第 ウエ 位に初めて 0 でない数字が現れる．

(2)　$\left(\dfrac{2}{5}\right)^n<10^{-15}$ を満たす最小の自然数 $n$ は　$n=$ オカ である．

(3)　$3^x=12^y=6$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=$ キ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 28 講　式と証明(1)

**例題 28 － 1**

(1)　$(2x-3y)^5$ を展開せよ．

(2)　$(3-x)^{10}$ を展開したときの $x^7$ の係数を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 28 ー 1**

(1)　$(a-b)^6$ を展開せよ.

(2)　$(2x-7)^5$ を展開したときの $x^3$ の係数を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 28 － 2**

(1)　$x^3+2x-3$ を $x^2+2x-1$ で割った商と余りを求めよ．

(2)　整式 $P$ を $x^2-2x-1$ で割ると，商が $2x-3$，余りが $-2x$ になった．このとき，整式 $P$ を求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 28 − 2**

(1)　$2x^3-5x^2+4x-1$ を $x^2-x+1$ で割った商と余りを求めよ.

(2)　整式 $x^3-2x^2-4x+8$ を整式 $A$ で割ると，商が $x+1$，余りが $-5x+4$ になった．このとき，整式 $A$ を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 28 － 3**

次の式を計算せよ．

(1) $\dfrac{x^2-11x+24}{x^2-6x-16}\times\dfrac{x^2+2x}{x^2-6x+9}$

(2) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}$

(3) $\dfrac{x+2}{x-\dfrac{2}{x+1}}$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 28 − 3**

次の式を計算せよ．

(1) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x}\div\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$

(2) $\dfrac{3}{(x+1)(x-2)}+\dfrac{x-6}{(x-2)(x+2)}$

(3) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 28 － 4**

次の等式が $x$ についての恒等式となるように，定数 $a$，$b$，$c$ の値を定めよ．

(1)　$x^2=a(x+2)^2+b(x+3)^2+c(x+2)(x+3)$

(2)　$\dfrac{2x-1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 28 ー 4**

次の等式が $x$ についての恒等式となるように，定数 $a$，$b$，$c$ の値を定めよ．

(1)　$2x^2+3x-1=ax(x+1)+bx(x-1)+c(x+1)(x-1)$

(2)　$\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第28講　式と証明(1)

(1)　$(x+2y)^5$ の展開式で，$x^3y^2$ の項の係数は [アイ] である．

(2)　$6x^3+11x^2-2$ を整式 $A$ で割ると，商が $2x^2+3x-1$ で余りが $-1$ である．このとき $A=$ [ウ] $x+$ [エ] である．

(3)　等式 $x^3-3x^2+7=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$ が $x$ についての恒等式となるとき，$a=$ [オ]，$b=$ [カ]，$c=$ [キ]，$d=$ [ク] である．

(4)　等式 $\dfrac{5x+1}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-1}$ が $x$ についての恒等式となるとき，$a=$ [ケ]，$b=$ [コ] である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 29 講　式と証明(2)

**例題 29 − 1**

次の等式を証明せよ.

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 29 ー 1**

次の等式を証明せよ.

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 29 ー 2**

次の等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$a+b+c=0$ のとき　$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

(2)　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき　$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 29 － 2**

次の等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$a+b+c=0$ のとき　$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$

(2)　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 29 － 3**

次の不等式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

(1)　$x^2-x+1\geqq x$

(2)　$x^2-6x+10>0$

(3)　$x^2-2x+y^2+4y+5\geqq 0$

(4)　$x^2+2y^2-2xy+4y>-5$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 29 − 3**

次の不等式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

(1)　$x^2+3x>-3$

(2)　$x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2\geqq 0$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 29 － 4**

次の不等式を証明せよ.

(1)　$x>3$, $y>4$ のとき　$xy>4x+3y-12$

(2)　$a>0$, $b>0$ のとき　$\sqrt{2a+2b} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

(3)　$\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \geqq |a|+|b|$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 29 ー 4**

次の不等式を証明せよ．

(1)　$x<-3$，$y<2$ のとき　$xy>2x-3y+6$

(2)　$\sqrt{2(x^2+y^2)} \geqq |x|+|y| \geqq \sqrt{x^2+y^2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 29 講　式と証明(2)

(1)　$3x+y=3z$　……①，$x-3y=-z$　……②　のとき　$x^2+y^2=z^2$ であることを証明する．

①と②より $x$，$y$ を $z$ を用いて表すと　$x=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}z$，$y=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}z$　である．

したがって　$x^2+y^2=\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}z\right)^2+\left(\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}z\right)^2=z^2$　より　$x^2+y^2=z^2$　である．

(2)　不等式 $x^2-6xy+10y^2 \geqq 4y-4$ が成り立つことを証明する．

(左辺)－(右辺)$=x^2-6xy+10y^2-4y+4=(x-\boxed{オ}y)^2+(y-\boxed{カ})^2 \geqq 0$

より　$x^2-6xy+10y^2 \geqq 4y-4$　である．

また，等号が成立するのは　$x=\boxed{キ}$，$y=\boxed{ク}$　のときである．

(3)　$|a|<1$，$|b|<1$ のとき，$ab+1>a+b$　であることを証明する．

(左辺)－(右辺)$=ab+1-(a+b)=(a-\boxed{ケ})(b-\boxed{コ})$ である．

$|a|<1$　より　$a-1<0$，$|b|<1$　より　$b-1<0$

よって　$(a-\boxed{ケ})(b-\boxed{コ})>0$

したがって　$ab+1>a+b$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 30 講　式と証明(3)・複素数と方程式(1)

**例題 30 － 1**

$a>0$，$b>0$ とする．次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つのはどういうときか．

(1)　$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$　　　(2)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 30 ー 1**

$a>0$，$b>0$ とする．次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つのはどういうときか．

(1)　$a+1+\dfrac{12}{a+1} \geqq 4\sqrt{3}$　　(2)　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 8$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 30 ー 2**

(1)　$x>0$ のとき　$x+\dfrac{2}{x}$ の最小値と，そのときの $x$ の値を求めよ．

(2)　$a>0$，$b>0$，$ab=16$ のとき，$a+b$ の最小値を求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 30 ー 2**

(1)　$x>-2$ のとき　$x+2+\dfrac{16}{x+2}$ の最小値と，そのときの $x$ の値を求めよ．

(2)　$a>0$，$b>0$，$ab=12$ のとき，$a+2b$ の最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 30 － 3**

(1)　次の計算をせよ．

(ア)　$(5-4i)+(2+2i)$　　(イ)　$(3-4i)^2$　　(ウ)　$\dfrac{1}{2+i}$

(2)　次の等式を満たす実数 $x$，$y$ の値を求めよ．

(ア)　$x+3i=-4+yi$　　(イ)　$(4+2i)x+(1+4i)y=-7$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 30 ー 3**

(1)　次の計算をせよ．

(ア)　$(3+2i)-(2-i)$　　(イ)　$(3+5i)^2$　　(ウ)　$\dfrac{3+2i}{2-i}$

(2)　次の等式を満たす実数 $x$，$y$，$a$，$b$ の値を求めよ．

(ア)　$(1-2i)(x+yi)=2+6i$　　(イ)　$\dfrac{a+2i}{1+3i}=1+bi$


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 30 － 4**

(1)　次の2次方程式を解け.

(ア)　$x^2=-4$　　(イ)　$x^2-2x+3=0$

(2)　$a$ を定数とする. 2次方程式 $4x^2+(a-1)x+1=0$ の解の種類を判別せよ.

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 30 － 4**

⑴　次の 2 次方程式を解け．

　㋐　$x^2=-5$　　　㋑　$x^2+4\sqrt{3}x+13=0$

⑵　$a$ を定数とする．2 次方程式 $2x^2-2ax-a^2+3=0$ の解の種類を判別せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第30講　式と証明(3)・複素数と方程式(1)

(1)　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{9}{x}$ は $x=\boxed{\text{ア}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとる.

(2)　$(2+i)x+(-i+3)y=\dfrac{1}{1+i}$ を満たす実数 $x$，$y$ は　$x=-\dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}}}$，$y=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である.

(3)　2次方程式 $4x^2-3x+1=0$ の解は　$x=\dfrac{\boxed{\text{キ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\,i}{\boxed{\text{ケ}}}$ である.

(4)　2次方程式 $x^2-2mx+m+2=0$ は　$-\boxed{\text{コ}}<m<\boxed{\text{サ}}$ のとき異なる2つの虚数解をもつ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 31 講　複素数と方程式(2)

**例題 31 － 1**

2 次方程式 $2x^2-2x+1=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，次の式の値を求めよ．

(ア)　$\alpha^2+\beta^2$　　(イ)　$\alpha^3+\beta^3$　　(ウ)　$(\alpha-\beta)^2$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 31 ー 1**

2 次方程式 $2x^2-8x+5=0$ の 2 つの解を $\alpha$, $\beta$ とするとき，$\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 31 ー 2**

(1)　次の条件を満たすような定数 $a$ の値をそれぞれ求めよ．

　(ア)　$2x^4+3x^3-ax+1$ を $x+2$ で割ると余りが $1$ である．

　(イ)　$x^3+ax+a+1$ が $x-3$ で割り切れる．

(2)　整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余りは $1$，$x+2$ で割ると余りは $7$ となる．このとき，$P(x)$ を $x^2+x-2$ で割った余りを求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 31 － 2**

(1)　$6x^3+ax^2-3x-9$ が $2x+3$ で割り切れるとき，定数 $a$ の値を求めよ．

(2)　整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると $-1$ 余り，$x+3$ で割ると 9 余る．このとき $P(x)$ を $x^2+x-6$ で割った余りを求めよ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 31 － 3**

次の方程式を解け.

(1)　$x^3+4x^2+x-6=0$　　(2)　$x^4-2x^3-x^2-4x-6=0$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 31 ー 3**

次の方程式を解け.

(1)　$2x^3-5x^2-x+6=0$

(2)　$x^4+3x^3-5x^2-3x+4=0$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 31 ― 4**

(1)　3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-6=0$ が $-1$ と 2 を解にもつとき，定数 $a$，$b$ の値と他の解を求めよ．

(2)　方程式 $x^3=1$ の解のうち，虚数であるものの 1 つを $\omega$ とするとき，$\omega^8+\omega^4$ の値を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題31－4**

(1)　3次方程式 $x^3+ax^2-21x+b=0$ が1と3を解にもつとき，定数 $a$，$b$ の値と他の解を求めよ．

(2)　1の3乗根のうち，虚数であるものの1つを $\omega$ とするとき，$\omega^{11}+\omega^{10}+1$ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 31 講　複素数と方程式(2)

(1)　2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の解を $\alpha$，$\beta$ とすると，$\alpha^2+\beta^2=-$ [ア]，

$\alpha^3+\beta^3=$ [イウ] である．

(2)　$2x^3+ax^2+bx+6$ は $x+2$ で割り切れ，$x-3$ で割ると 30 余る．このとき

$a=-$ [エ]，$b=-$ [オ] である．

(3)　方程式 $3x^3-x^2-8x-4=0$ の解は　$x=$ [カ]，$-$ [キ]，$-\dfrac{[ク]}{[ケ]}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 32 講　微分法(1)

**例題 32 － 1**

関数 $f(x)=3x^2-2$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$x$ が $-1$ から 5 まで変化するときの平均変化率を求めよ．

(2)　$x$ が 2 から $2+h$（$h\neq0$）まで変化するときの平均変化率を求めよ．

(3)　$x=2$ における微分係数を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 32 ー 1**

関数 $f(x)=3x^2-2x+1$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$x=-4$ から $x=2$ まで変化するときの平均変化率を求めよ．

(2)　$x=-1$ における微分係数を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 32 － 2**

次の関数を微分せよ．また $x=1$ における微分係数をそれぞれ求めよ．

(1)　$y=3x^2+6x-5$

(2)　$y=2x^3-4x^2-6$

(3)　$y=2x^4-3x^2+7x-9$

(4)　$y=-2$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 32 － 2**

次の関数を微分せよ．また $x=-1$ における微分係数をそれぞれ求めよ．

(1)　$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+2$　　(2)　$f(x)=x^3+5x^2+2x-1$　　(3)　$f(x)=-3x^4+4x^2+3$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 32 － 3**

(1)　曲線 $y=x^2-3x+2$ の点 $(3,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ．

(2)　曲線 $y=-x^3+x+1$ に接し，傾きが $-2$ である直線の方程式を求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 32 － 3**

(1)　曲線 $y=-2x^2+5x$ の点 $(3,\ -3)$ における接線の方程式を求めよ．

(2)　曲線 $y=x^3-2x^2+2$ と直線 $y=-x+k$ が接するとき，$k$ の値を求めよ．

**例題 32 ー 4**

(1)　関数 $y=x^2-3x+6$ のグラフの接線で，点 $(1,\ 0)$ を通るものの方程式を求めよ．

(2)　点 $(-2,\ 2)$ から曲線 $y=\dfrac{1}{3}x^3-x$ に引いた接線の方程式を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 32 － 4**

(1)　点 $(1,\ 1)$ から関数 $y=-x^2+x$ のグラフに引いた接線の方程式を求めよ．

(2)　関数 $y=x^3-3x^2+5$ の接線で，点 $(-1,\ 9)$ を通るものの方程式を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 32 講　微分法(1)

(1)　関数 $f(x)=-3x^2+6x-5$ について，$f'(x)=-$ ア $x+$ イ である．また $f'(1)=$ ウ である．

(2)　曲線 $y=-x^3+5x$ 上の点 $(1,\ 4)$ における接線の方程式は　$y=$ エ $x+$ オ である．

(3)　関数 $f(x)=x^3-3x^2-1$ のグラフ上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$y=($ カ $t^2-$ キ $t)x-$ ク $t^3+$ ケ $t^2-1$

である．よって，この関数のグラフの接線のうち，点 $(0,\ 0)$ を通るものの方程式は

$y=-$ コ $x$，$y=\dfrac{\text{サシ}}{4}x$ である．

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 33 講　微分法(2)

**例題 33 － 1**

次の関数の増減を調べ，グラフをかけ．また，極値を求めよ．

(1)　$y=x^3-3x+1$

(2)　$y=-x^3+6x^2-12x+7$

(3)　$y=x^3+3x^2+4x+2$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 33 ー 1**

次の関数の増減を調べ，グラフをかけ．また，極値を求めよ．

(1)　$y=-2x^3+3x^2-1$　　(2)　$y=x^3+3x^2+3x$

(3)　$y=-x^3-x-\dfrac{1}{3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 33 － 2**

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $x=-1$ で極大値をとり，$x=3$ で極小値 $-28$ をとるように，定数 $a$，$b$，$c$ の値を定めよ．また，極大値を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 33 − 2**

関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極大値 6 をとり，$x=2$ で極小値 5 をとるように，定数 $a$，$b$，$c$，$d$ の値を定めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 33 ー 3**

(1)　関数 $f(x)=x^3-6x^2+6ax$ が極値をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

(2)　関数 $f(x)=x^3+ax^2+3(a-2)x+7$ が極値をもたないとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 33 ー 3**

(1)　関数 $f(x)=x^3-3ax^2+ax+2$ が極値をもつような定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

(2)　関数 $f(x)=-x^3-ax^2-2x-3$ が単調に減少するような定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 33 ー 4**

関数 $y=x^3-6x^2+9x+5$ の区間 $-1\leqq x\leqq 4$ における最大値と最小値を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 33 ー 4**

関数 $y=-x^3+6x^2-9x$ の区間 $-1\leqq x\leqq 2$ における最大値と最小値を求めよ．


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 33 講　微分法(2)

(1)　関数 $y=-x^3+6x^2-9x+2$ は $x=$ [ア] のとき極小値 $-$ [イ]，$x=$ [ウ] のとき極大値 [エ] をとる.

(2)　関数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+2$ が $x=1$ で極値 1 をとるとき，$b=-$ [オ]，$c=-$ [カ] である.

(3)　関数 $f(x)=x^3-3ax^2+3ax+1$ が単調に増加するような定数 $a$ の値の範囲は [キ] $\leqq a\leqq$ [ク] である.

(4)　関数 $f(x)=x^3-3x^2+4$ の区間 $-2\leqq x\leqq 2$ における最大値は [ケ]，最小値は $-$ [コサ] である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第34講　微分法(3)・積分法(1)

**例題 34 − 1**

(1)　次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ.

(ア)　$2x^3-6x+1=0$　　(イ)　$x^3+3x^2-4=0$

(2)　方程式 $-x^3+3x^2+9x=a$ が異なる3つの実数解をもつような定数 $a$ の値の範囲を求めよ.

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 34 ー 1**

(1)　次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ.

　(ア)　$2x^3+3x^2+2=0$　　(イ)　$x^3+4x^2+6x+2=0$

(2)　方程式 $2x^3+9x^2-3=a$ が異なる 3 つの実数解をもつような定数 $a$ の値の範囲を求めよ.



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 34 ー 2**

次の不等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$x>0$ のとき　$3x^3+1>x$

(2)　$x\geqq 0$ のとき　$x^3+4x\geqq 3x^2$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 34 ー 2**

次の不等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+1 \geqq 3x^2$

(2)　$x>1$ のとき　$x^3-6x^2+12x-7>0$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 34 − 3**

(1)　次の不定積分を求めよ．

(ア)　$\int (x^2+x+2)dx$　　(イ)　$\int (x+2)^2 dx$

(2)　次の定積分を求めよ．

(ア)　$\int_{-3}^{1} (2x^2-3x+4)dx$　　(イ)　$\int_{2}^{4} (x-1)(x-3)dx$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題34－3**

(1)　不定積分 $\int(3x^2-x+2)dx$ を求めよ．

(2)　次の定積分を求めよ．

(ア)　$\int_{1}^{4}(x-1)^2dx$　　(イ)　$\int_{-1}^{1}(4x^3-x^2+2x-1)dx$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 34 － 4**

(1)　等式 $f(x)=x+\int_0^3 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

(2)　次の問いに答えよ.

(ア)　$\dfrac{d}{dx}\int_2^x (2t+1)dt$ を計算せよ.

(イ)　等式 $\int_a^x f(t)dt=x^2-5x+6$ を満たす関数 $f(x)$ および定数 $a$ の値を求めよ.

**【Point Pickup】**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 34 ー 4**

(1)　等式 $f(x)=3x^2-x\int_0^2 f(t)dt+2$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

(2)　等式 $\int_a^x f(t)dt=2x^2-9x+4$ を満たす関数 $f(x)$ および定数 $a$ の値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 34 講　微分法(3)・積分法(1)

(1)　3 次方程式 $2x^3-3x^2-12x-a=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつような $a$ の範囲は

$-$ アイ $<a<$ ウ である.

(2)　定積分 $\int_{-2}^{2}(2x^3+x^2+3x)dx$ の値は $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である.

(3)　等式 $f(x)=x^2+2\int_0^1 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ は　$f(x)=x^2-\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である.

(4)　等式 $\int_a^x f(t)dt=x^3-3x^2+x+a$ を満たす関数 $f(x)$ は

$f(x)=$ ケ $x^2-$ コ $x+$ サ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 35 講　積分法(2)

**例題 35 ー 1**

次の曲線，直線と $x$ 軸で囲まれた図形の面積 $S$ を求めよ.

(1)　$y=x^2+3$，$x=-2$，$x=3$

(2)　$y=x^2-4x-5$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 35 ー 1**

次の曲線，直線と $x$ 軸で囲まれた図形の面積 $S$ を求めよ．

(1)　$y=-x^2+3x$

(2)　$y=-x^2-2$，$x=-1$，$x=2$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 35 ー 2**

次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 $S$ を求めよ.

(1)　$y=x^2$，$y=x+2$

(2)　$y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 35 － 2**

次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 $S$ を求めよ.

(1)　$y=-x^2-x+4$,　$y=-3x+1$

(2)　$y=x^2-2x$,　$y=-x^2+x+2$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 35 − 3**

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2-4$，$y \leqq x+2$，$y \leqq -2x-1$ の表す領域を図示せよ．

(2)　(1)の領域の面積 $S$ を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 35 ー 3**

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2$，$y \geqq -x+2$，$y \leqq x+6$ の表す領域を図示せよ．

(2)　(1)の領域の面積 $S$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 35 ー 4**

放物線 $C$ : $y=x^2-x+3$ 上の 2 点 $(-1,\ 5)$, $(3,\ 9)$ における接線をそれぞれ $l_1$, $l_2$ とする.

(1) $l_1$, $l_2$ の方程式を求めよ.

(2) $C$, $l_1$, $l_2$ によって囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ.

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 35 − 4**

点 (1, 1) から放物線 $C$：$y=-x^2+x$ に2本の接線を引く．

(1)　2本の接線の方程式を求めよ．

(2)　C と(1)の2本の接線によって囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 35 講　積分法(2)

(1)　曲線 $y=x^2-2x$ $(x \leqq 1)$，$x$ 軸，直線 $x=-1$，$x=1$ で囲まれた部分の面積は [ア] である．

(2)　2 つの曲線 $y=x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3$ で囲まれた部分の面積は $\frac{\fbox{イウ}}{\fbox{エ}}$ である．

(3)　放物線 $C: y=x^2+x-2$ 上の点 $(-2,\ 0)$，$(0,\ -2)$ における接線をそれぞれ $l_1$，$l_2$ とすると，$l_1$ の方程式は　$y=$ [オカ] $x-$ [キ]，$l_2$ の方程式は　$y=x-$ [ク] である．

さらに $C$，$l_1$，$l_2$ で囲まれる図形の面積は $\frac{\fbox{ケ}}{\fbox{コ}}$ である．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第36講　数列(1)

**例題36－1**

(1)　次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．また，第10項を求めよ．

(ア)　3，7，11，……　　(イ)　50，47，44，……

(2)　第5項が4，第10項が14である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ．また，24はこの数列の第何項か．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 36 ー 1**

(1)　次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．また，第 20 項を求めよ．

　(ア)　1，6，11，……　　　(イ)　100，94，88，……

(2)　第 3 項が 12，第 11 項が −4 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ．また，0 はこの数列の第何項か．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 36 ー 2**

(1)　初項 3，末項 21，項数 10 の等差数列の和を求めよ．

(2)　初項 60，公差 −6 の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ．また，$S_{10}$ を求めよ．

(3)　初項 5，公差 9 の等差数列 $\{b_n\}$ の第 11 項から第 20 項までの和を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 36 ー 2**

(1)　初項 3，公差 $-7$ の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ．また，$S_{20}$ を求めよ．

(2)　初項 2，公差 4 の等差数列 $\{c_n\}$ の第 20 項から第 40 項までの和を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 36 − 3**

(1)　次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．また，第 5 項を求めよ．

　(ア)　2，6，18，……　　　(イ)　100，−50，25，……

(2)　第 3 項が 28，第 6 項が 224 である等比数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ．ただし公比は実数とする．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 36 − 3**

(1)　次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．また，第 6 項を求めよ．

(ア)　$-27,\ -9,\ -3,\ \cdots\cdots$　　(イ)　$2,\ -3,\ \dfrac{9}{2},\ \cdots\cdots$

(2)　第 2 項が $-6$，第 5 項が 162 である等比数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ．ただし公比は実数とする．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 36 − 4**

(1)　次の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ．

(ア)　初項 3，公比 2　　(イ)　初項 27，公比 $\frac{1}{3}$

(2)　初項 16，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の第 6 項から第 10 項までの和を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 36 ー 4**

(1)　次の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ．

(ア)　初項 1，公比 3　　　(イ)　初項 81，公比 $\dfrac{1}{4}$

(2)　初項 2，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の第 3 項から第 6 項までの和を求めよ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 36 講　数列(1)

(1)　等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とする．$a_4=11$，$a_{12}=35$ のとき，

$a_n=$ ア $n-$ イ ，$S_n=\dfrac{n}{2}($ ウ $n+$ エ $)$，$S_5=$ オカ である．

(2)　公比が実数である等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とする．$a_2=-9$，

$a_5=\dfrac{9}{8}$ のとき，$a_n=$ キク $\cdot\left(-\dfrac{1}{\text{ケ}}\right)^{n-1}$，$S_n=$ コサ $\left\{1-\left(-\dfrac{1}{\text{ケ}}\right)^n\right\}$，

$S_5=\dfrac{\text{シス}}{\text{セ}}$ である．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 37 講　数列(2)

**例題 37 ― 1**

(1)　次の和を項を書き並べて表せ.

(ア)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2k-1)$　　　(イ)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}2^k$

(2)　次の数列の和を記号 $\Sigma$ を用いて表せ.

(ア)　$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots\cdots,\ n^2$　　　(イ)　$1\cdot2,\ 2\cdot3,\ 3\cdot4,\ \cdots\cdots,\ (n-1)\cdot n$

**【Point Pickup】**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 37 ー 1**

(1)　次の和を項を書き並べて表せ.

(ア)　$\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$　　　(イ)　$\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}$

(2)　次の数列の和を記号 $\Sigma$ を用いて表せ.

(ア)　$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ \cdots\cdots,\ n^3$　　　(イ)　$1\cdot1,\ 3\cdot2,\ 5\cdot4,\ \cdots\cdots,\ (2n+1)\cdot2^n$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 37 ー 2**

次の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k-4)$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 37 ー 2**

次の和を求めよ.

(1) $\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$　　(2) $\sum_{k=1}^{n}2\cdot 3^k$　　(3) $\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 37 ー 3**

次の数列の和を求めよ．

(1)　1，6，11，……，$5n-4$

(2)　1，2，4，8，……，$2^n$

(3)　$1^2$，$3^2$，$5^2$，……，$(2n-1)^2$

**【Point Pickup】**


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 37 ー 3**

次の数列の和を求めよ.

(1)　1, 4, 7, ……, $3n-5$

(2)　2, 8, 32, ……, $2\cdot 4^{n-1}$

(3)　$1\cdot 1$, $2\cdot 4$, $3\cdot 7$, ……, $n(3n-2)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 37 ー 4**

次の数列の一般項 $a_n$ を求めよ.

(1)　1，4，8，13，19，……　　　　(2)　1，2，5，14，41，……

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 37 － 4**

次の数列の一般項 $a_n$ を求めよ.

(1)　2, 6, 12, 20, 30, ……

(2)　5, 7, 11, 19, 35, ……

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 37 講　数列(2)

(1)　次の和を求めよ.

(i)　$\sum_{k=1}^{n}(2k-7)=n(n-$ ア $)$

(ii)　$\sum_{k=1}^{n}4^k=\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}(4^n-1)$

(2)　数列 1･2, 2･3, 3･4, …… の初項から第 $n$ 項までの和は

$\dfrac{1}{\text{エ}}n(n+$ オ $)(n+$ カ $)$ である. ただし, オ $<$ カ とする.

(3)　数列 $\{a_n\}$ : 1, 11, 111, 1111, …… の一般項は $\dfrac{\text{キク}^n-\text{ケ}}{\text{コ}}$ である.



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 38 講　数列(3)

**例題 38 － 1**

初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$S_n=n^2-3n$　　(2)　$S_n=3^n+1$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 38 ー 1**

初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

⑴　$S_n=3n^2-2n+1$　　⑵　$S_n=2^{n+2}-4$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 38 ― 2**

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n-2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，$a_2$，$a_3$，$a_4$，$a_5$ を求めよ．

(2)　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ．

(ア)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+4$　　　(イ)　$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 38 − 2**

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，$a_2$，$a_3$，$a_4$，$a_5$ を求めよ．

(2)　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ．

(ア)　$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n-3$　　　(イ)　$a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 38 － 3**

次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ．

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+n$

(2)　$a_1=6$，$a_{n+1}=4a_n-9$

**【Point Pickup】**



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 38 － 3**

次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ．

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+4^n$

(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 38 － 4**

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が $S_n=2a_n-n$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$a_{n+1}$ を $a_n$ を用いて表せ．　(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

【Point Pickup】



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 38 ー 4**

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が $S_n=-2a_n+n$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$a_{n+1}$ を $a_n$ を用いて表せ．　(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第38講　数列(3)

(1)　初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が $S_n=2n^2+5n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=$ ア $n+$ イ である.

(2)　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ.

(i)　$a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+3$　　$a_n=$ ウ $n-$ エ

(ii)　$a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n$　　$a_n=$ オ $^n$

(iii)　$a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+2^n+n$　　$a_n=$ カ $^n+\dfrac{1}{\text{キ}}n^2-\dfrac{1}{\text{ク}}n$

(iv)　$a_1=2$, $a_{n+1}=3a_n-2$　　$a_n=$ ケ $^{n-1}+$ コ

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 39 講　数列(4)

**例題 39 ー 1**

すべての自然数 $n$ に対して，次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 39 ー 1**

$n$ が自然数のとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ．

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 39 － 2**

$n$ を 2 以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 39 − 2**

$n$ を 4 以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

$$2^n > 3n+1$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 39 － 3**

$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1)　$a_2$，$a_3$，$a_4$ を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その結果を数学的帰納法によって証明せよ．

**【Point Pickup】**

©RECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 39 － 3**

$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2-1}{n+1}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1)　$a_2$，$a_3$，$a_4$ を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その結果を数学的帰納法によって証明せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 39 ー 4**

偶数の数列　2，4，6，8，…… を，第 $n$ 群が $n$ 個の偶数を含むように分ける．

$2 \mid 4,\ 6 \mid 8,\ 10,\ 12 \mid 14,\ 16,\ 18,\ 20 \mid 22,\ \cdots\cdots$

(1)　第 $n$ 群の最後の偶数を求めよ．　　(2)　第 $n$ 群の最初の偶数を求めよ．

(3)　150 は第何群の何番目の数か．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 39 − 4**

奇数の数列　1，3，5，7，…… を，第 $n$ 群が $2^{n-1}$ 個の奇数を含むように分ける．

$1 \mid 3,\ 5 \mid 7,\ 9,\ 11,\ 13 \mid 15,\ 17,\ 19,\ \cdots\cdots,\ 29 \mid 31,\ \cdots\cdots$

(1)　第 $n$ 群の最後の奇数を求めよ．

(2)　第 $n$ 群の最初の奇数を求めよ．

(3)　77 は第何群の何番目の数か．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 39 講　数列(4)

$a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{4}{n+1}+\dfrac{1}{a_n}$　……①で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう.

$a_2=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ a_3=\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であることから, $a_n=\left(\dfrac{n+\boxed{\text{カ}}}{n}\right)^2$ ……②　と推測される.

[Ⅰ]　$n=1$ のとき　②は明らかに成り立つ.

[Ⅱ]　$n=k$ のとき　②が成り立つと仮定すると　$a_k=\left(\dfrac{k+\boxed{\text{カ}}}{k}\right)^2$

このとき　①より　$a_{k+1}=\dfrac{4}{k+1}+\dfrac{1}{a_k}=\left(\dfrac{k+\boxed{\text{キ}}}{k+\boxed{\text{ク}}}\right)^2$　より

②は $n=k+1$ のときも成り立つ.

[Ⅰ], [Ⅱ] より数学的帰納法から，すべての自然数 $n$ で②が成り立つ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 40 講　平面ベクトル(1)

**例題 40 − 1**

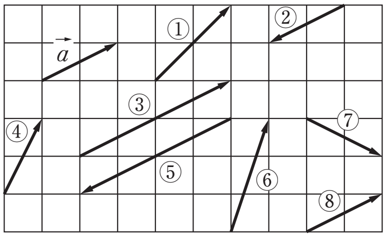
右図について，次のようなベクトルを選べ.

(1)　$\vec{a}$ と大きさが等しいベクトル

(2)　$\vec{a}$ と向きが等しいベクトル

(3)　$\vec{a}$ と等しいベクトル

(4)　$\vec{a}$ の逆ベクトル



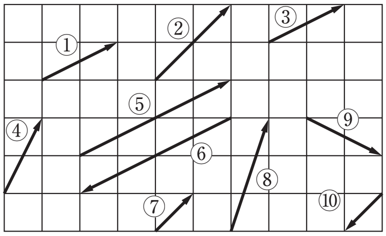

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 40 ー 1**

右の図に示されたベクトルについて，次のようなベクトルの組をすべて求めよ.




(1)　大きさが同じベクトル

(2)　向きが同じベクトル

(3)　等しいベクトル

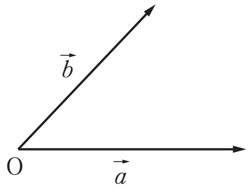
(4)　互いに逆ベクトル



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 40 − 2**

右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを点 O を始点とする有向線分で図示せよ．




(1)　$2\vec{a}$　　(2)　$-\frac{1}{2}\vec{b}$　　(3)　$\vec{a}+\vec{b}$

(4)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(5)　$2\vec{b}-\vec{a}$

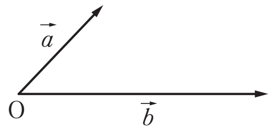
【Point Pickup】



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 40 － 2**

右の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，次のベクトルを点Oを始点とする有向線分で図示せよ.




(1)　$3\vec{a}$　　(2)　$-\frac{2}{3}\vec{b}$　　(3)　$\vec{a}+\vec{b}$

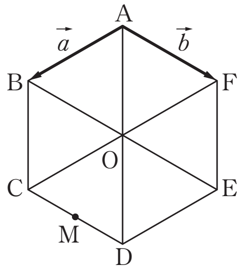
(4)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(5)　$-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題40－3**

正六角形ABCDEFにおいて，その中心をO，辺CDの中点をMとする．
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．




(1)　$\overrightarrow{FC}$　(2)　$\overrightarrow{MC}$　(3)　$\overrightarrow{AO}$
(4)　$\overrightarrow{AM}$　(5)　$\overrightarrow{FB}$

【Point Pickup】



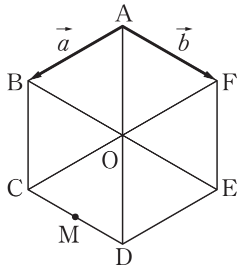
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 40 － 3**

正六角形 ABCDEF において，その中心を O，辺 CD の中点を M とする．

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(1)　$\overrightarrow{OA}$　　(2)　$\overrightarrow{MF}$　　(3)　$\overrightarrow{BF}$





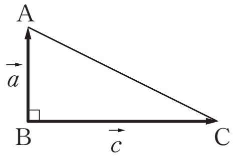

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 40 ー 4**

AB＝1，BC＝2，∠B＝90° の直角三角形 ABC がある．
$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{c}$
を用いて表せ.

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と同じ向きの単位ベクトル

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と平行な単位ベクトル



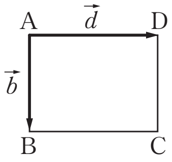

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 40 － 4**

AB＝3，AD＝4 の長方形 ABCD がある．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．




(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きの単位ベクトル

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と平行な単位ベクトル



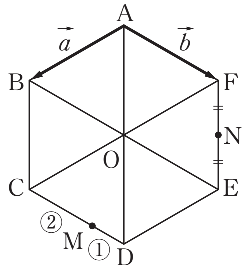
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第40講　平面ベクトル(1)

(1)　正六角形ABCDEFにおいて，その中心をO，辺CDを2：1に内分する点をM，辺EFの中点をNとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$とすると，　$\overrightarrow{AD}=$ [ア] $\vec{a}+$ [イ] $\vec{b}$，

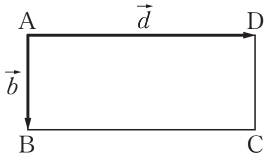
$\overrightarrow{OM}=\vec{a}+\dfrac{[ウ]}{[エ]}\vec{b}$，　$\overrightarrow{MN}=-\dfrac{[オ]}{[カ]}\vec{a}-\dfrac{[キ]}{[ク]}\vec{b}$

である．




(2)　AB＝5，AD＝12の長方形ABCDがある．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$とするとき，$\overrightarrow{DB}$と同じ向きの単位ベクトルは

$\dfrac{1}{[ケコ]}\vec{b}-\dfrac{1}{[ケコ]}\vec{d}$　である．




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第41講　平面ベクトル(2)

**例題 41 － 1**

$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 6)$ のとき，次のベクトルの成分および大きさを求めよ．

(1)　$3\vec{a}-2\vec{b}$　　　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$

**【Point Pickup】**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 41 ー 1**

$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(5,\ 1)$ のとき，次のベクトルの成分および大きさを求めよ．

(1)　$-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題41－2**

(1)　$\vec{c}=(3,\ 1)$ と平行な単位ベクトルの成分を求めよ．

(2)　2つのベクトル $\vec{a}=(5,\ 2)$，$\vec{b}=(x,\ 8)$ が平行になるときの $x$ の値を求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 41 ー 2**

(1)　$\vec{c}=(2,\ -3)$ と同じ向きの単位ベクトルの成分を求めよ.

(2)　2 つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ x)$ について, $2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行になるときの $x$ の値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

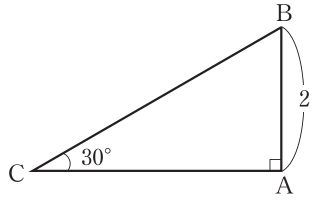
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 41 ー 3**

右図のような直角三角形について，次の内積を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(3)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$　　(4)　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CA}$



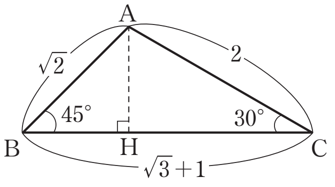

**【Point Pickup】**



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 41 − 3**

右図のような三角形 ABC において，次の内積を求めよ．




(1)　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$

(3)　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(4)　$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 41 ー 4**

(1)　次の 2 つのベクトルの内積と，そのなす角 $\theta$ を求めよ．

(ア)　$\vec{a}=(-1,\ 5)$，$\vec{b}=(2,\ 3)$　　(イ)　$\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$

(2)　$\vec{a}=(-6,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ x)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるような $x$ の値を求めよ．

また，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような $x$ の値を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 41 ー 4**

(1)　2つのベクトル $\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -\sqrt{3})$ の内積と，そのなす角 $\theta$ を求めよ．

(2)　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(5,\ 2)$，$\vec{x}=(t-2,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{x}$ が垂直になるような $t$ の値を求めよ．また，$\vec{x}+\vec{a}$，$\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるような $t$ の値を求めよ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 41 講　平面ベクトル(2)

(1)　$\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(x,\ -1)$ のとき　$3\vec{a}+\vec{b}=(x+$ ア ，$-$ イウ )，

$\vec{a}-\vec{b}=(-x+$ エ ，$-$ オ ) である．$3\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$ より，$3\vec{a}+\vec{b}$ と

$\vec{a}-\vec{b}$ が平行になるのは $x=\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}$ のときであり，垂直になるときの $x$ の値のうち正

であるものは $x=$ ク である．

(2)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $60°$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ケ である．

(3)　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -3)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ は $\theta=$ コサシ ° である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 42 講　平面ベクトル(3)

**例題 42 − 1**

(1)　次の等式を証明せよ.

(ア)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$　(イ)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(ウ)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき, $2\vec{a}+\vec{b}$ の大きさを求めよ.

【Point Pickup】

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 42 ー 1**

(1)　次の等式を証明せよ．

(ア)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　(イ)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 42 ー 2**

次の条件を満たす 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ．

(1)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$

(2)　$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=2$，$3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 42 ー 2**

次の条件を満たす2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ．

(1)　$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|2\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{19}$

(2)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 42 ー 3**

3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC において，次の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.

(1)　辺 AB を 2：1 に内分する点 P

(2)　辺 AC を 4：1 に外分する点 Q

(3)　△ABC の重心 G

(4)　△APQ の重心 G′

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 42 ー 3**

3点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC において，次の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.

(1)　辺 AC を 1：2 に内分する点 P

(2)　辺 BC を 2：5 に外分する点 Q

(3)　△CPQ の重心 G

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 42 － 4**

△ABC において，辺 AB を 2：1 に内分する点を P，辺 AC の中点を M，線分 BM の中点を Q とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 3 点 P，Q，C は一直線上にあることを証明せよ．

(3) PQ：QC を求めよ．

【Point Pickup】



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 42 ー 4**

△ABC において，辺 AB を 3：2 に内分する点を D，辺 BC を 2：1 に外分する点を E，△ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　辺 BC の中点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3)　3 点 D，G，E は一直線上にあることを証明し，DG：GE を求めよ．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 42 講　平面ベクトル(3)

(1)　2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ [ア]，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ は　$\theta=$ [イウ]°，$|\vec{a}-\vec{b}|=$ [エ]　である.

(2)　△OAB の辺 OA を 5：2 に内分する点を C，辺 OB を 5：3 に内分する点を D，△OAB の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，3 点 C，G，D が一直線上にあることを証明したい.

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{[オ]}\vec{a}+\dfrac{1}{[オ]}\vec{b}$ であることから

$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{21}(-[カ]\vec{a}+[キ]\vec{b})$,

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{5}{56}(-[カ]\vec{a}+[キ]\vec{b})$　である.

よって　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{[クケ]}{[コ]}\overrightarrow{\mathrm{CG}}$　より，3 点 C，G，D は一直線上にある.



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 43 講　平面ベクトル(4)

**例題 43 － 1**

△ABC と点 P が $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AC}$ を満たす．また，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする．このとき，AP：PQ，BQ：QC を求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 43 ー 1**

△ABC と点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす．また，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする．このとき，AP：PQ，BQ：QC を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 43 − 2**

△ABC で，辺 BC を 1：2 に内分する点を D，辺 CA を 3：2 に内分する点を E とする．
また，線分 AD と線分 BE の交点を F とする．

(1) $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ．

(2) $\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，BF：FE，AF：FD を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 43 ー 2**

△ABCで，辺AB，BCを1：2に内分する点をそれぞれD，Eとし，線分CDと線分AEの交点をFとする．

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ．

(2)　$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，DF：FC，AF：FEを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 43 － 3**

△ABC において，辺 AB を 1：2 に内分する点を D，辺 AC を 3：2 に内分する点を E とし，線分 BE と線分 CD の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

**【Point Pickup】**


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 43 － 3**

△OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 OB の中点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 43 − 4**

AB＝4，AC＝5，$\angle A=60^\circ$ の △ABC において，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC の交点を H とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ．　　(2)　$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 43 − 4**

AB＝3，AC＝2，$\angle A = 120^\circ$ の $\triangle ABC$ において，辺 BC 上に点 H を $AH \perp BC$ となるようにとる．このとき次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ を求めよ．　　(2)　$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第43講　平面ベクトル(4)

(1)　△ABCの辺ABを2：1に内分する点をD，辺BCの中点をMとし，線分AMとCDの交点をEとする．このとき，$\overrightarrow{AE}$を$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$で表したい．

$\overrightarrow{AB}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{AD}$である．また，$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AM}$とおくと

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}k\overrightarrow{AD}+\dfrac{k}{\boxed{オ}}\overrightarrow{AC}$　と表せる．

点EはCD上の点より　$\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}k+\dfrac{k}{\boxed{オ}}=1$　　よって　$k=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$

したがって　$\overrightarrow{AE}=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{ケ}}\overrightarrow{AC}$　と表せる．

(2)　OA＝2，OB＝3，∠O＝60°の△OABにおいて，辺AB上に点HをOH⊥ABとなるようにとる．このとき，AH：HB＝$\boxed{サ}$：$\boxed{シ}$である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 44 講　平面ベクトル(5)

**例題 44 － 1**

次の直線の方程式を，媒介変数 $t$ を用いて表せ.

(1)　点 A(4, 3) を通り，ベクトル $\vec{d}=(2,\ 1)$ に平行な直線.

(2)　2 点 A$(-1,\ 1)$，B$(2,\ -5)$ を通る直線.

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 44 ー 1**

次の直線の方程式を，媒介変数 $t$ を用いて表せ.

(1)　点 A(3，2) を通り，ベクトル $\vec{d}=(1,\ -3)$ に平行な直線.

(2)　2 点 A(−1，0)，B(0，2) を通る直線.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 44 － 2**

(1)　点 A$(3,\ -4)$ を通り，$\vec{n}=(2,\ -3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

(2)　点 A$(0,\ -1)$ から直線 $l：x-3y+2=0$ に垂線を引き，$l$ との交点を H とする．H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 44 − 2**

(1)　点 A(5，−1) を通り，$\vec{n}=(1,\ 3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

(2)　点 A(4，1) から直線 $l：2x-y+3=0$ に垂線を引き，$l$ との交点を H とする．H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 44 − 3**

平面上の定点 $A(\vec{a})$ と動点 $P(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか．

(1)　$|\vec{p}-\vec{a}|=1$　　(2)　$|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 44 − 3**

平面上の異なる 2 つの定点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ と動点 P$(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか．

(1)　$|2\vec{p}-\vec{a}|=3$　　(2)　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=5$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 44 － 4**

△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ とする．実数 $\alpha$，$\beta$ が次の条件を満たすとき，点 P はそれぞれどのような図形を描くか．O，A，B を適当にとって図示せよ．

(1)　$\alpha>0$，$\beta>0$　　(2)　$\alpha+\beta=1$

(3)　$\alpha+2\beta=1$，$\alpha\geqq0$，$\beta\geqq0$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 44 － 4**

△OABに対し，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ とする．実数 $\alpha$，$\beta$ が次の条件を満たすとき，点Pはそれぞれどのような図形を描くか．O，A，Bを適当にとって図示せよ．

(1)　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\geqq0$，$\beta\geqq0$

(2)　$3\alpha+\dfrac{1}{2}\beta=1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 44 講　平面ベクトル(5)

(1)　2 点 A(3, 2)，B(5, 6) を通る直線の方程式を媒介変数 $t$ を用いて表すと

$$\begin{cases} x = \boxed{\text{ア}}\,t + 3 \\ y = 4t + \boxed{\text{イ}} \end{cases}$$ である．

(2)　点 A(3, −2) を通り，直線 OA に垂直な直線の方程式は

$\boxed{\text{ウ}}\,x - \boxed{\text{エ}}\,y - \boxed{\text{オカ}} = 0$ である．

(3)　平面上の異なる 2 つの定点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) と動点 P($\vec{p}$) に対し，ベクトル方程式

$|2\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}| = 6$ は，線分 AB を 1 : $\boxed{\text{キ}}$ に内分する点を中心とする半径 $\boxed{\text{ク}}$ の円を表す．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第45講　空間ベクトル(1)

**例題45－1**

(1)　点P(1，2，3)に対して，次の点の座標を求めよ．

(ア)　$xy$平面に関して対称な点A　　(イ)　$yz$平面に関して対称な点B

(ウ)　$zx$平面に関して対称な点C　　(エ)　$x$軸に関して対称な点D

(オ)　$y$軸に関して対称な点E　　(カ)　$z$軸に関して対称な点F

(キ)　点(0，－1，5)に関して対称な点G

(2)　2点A(1，1，0)，B(3，－2，4)の間の距離を求めよ．

【Point Pickup】



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 45 － 1**

(1)　点 P$(-2,\ 1,\ -1)$ に対して，次の点の座標を求めよ．

(ア)　$xy$ 平面に関して対称な点 A　　(イ)　$z$ 軸に関して対称な点 B

(ウ)　点 $(1,\ -1,\ 0)$ に関して対称な点 C

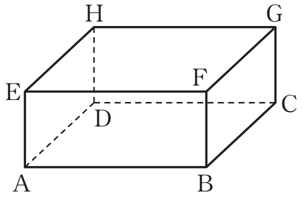
(2)　2 点 A$(3,\ 2,\ 1)$，B$(1,\ 4,\ -1)$ の間の距離を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 45 － 2**

直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする．このとき $\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{BH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．



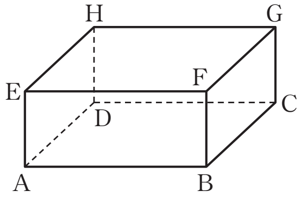

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題45－2**

直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする．このとき，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{HC}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{DF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．




ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 45 ー 3**

(1)　$\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 1)$，$\vec{c}=(2,\ -1,\ -2)$ のとき，$|\vec{a}|$ を求めよ．また，$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ の成分とその大きさを求めよ．

(2)　$\vec{a}=(1,\ -2,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ -2)$，$\vec{c}=(3,\ -2,\ -2)$ のとき，$\vec{p}=(-2,\ 3,\ -2)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 45 − 3**

(1)　$\vec{a}=(3,\ 1,\ 4)$，$\vec{b}=(-1,\ 6,\ 3)$，$\vec{c}=(-2,\ 5,\ 4)$ のとき，$|\vec{c}|$ を求めよ．また，$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$ の成分とその大きさを求めよ．

(2)　$\vec{a}=(0,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ -3)$，$\vec{c}=(3,\ 4,\ -1)$ のとき，$\vec{p}=(-6,\ 7,\ -3)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 45 ー 4**

3点 A(2, 1, 0), B(0, 2, 1), C(1, 0, 2) とするとき，2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ．また，△ABC の面積を求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 45 − 4**

3 点 A(2，1，2)，B(4，3，6)，C(4，1，4) とするとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ．また，△ABC の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第45講　空間ベクトル(1)

(1)　点P(3, −2, 1)に対し，点A(−3, −2, 1)は［ア］に関して対称な点であり，点B(−3, −2, −1)は［イ］に関して対称な点である．［ア］，［イ］に当てはまるものを次の①〜⑥の中から選べ．

①　$xy$ 平面　　②　$yz$ 平面　　③　$zx$ 平面

④　$x$ 軸　　⑤　$y$ 軸　　⑥　$z$ 軸

(2)　$\vec{a}=(2,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2,\ -1)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}=($［ウ］$+t,\ 1+$［エ］$t,\ 1-t)$ である．また，$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値は $\dfrac{\boxed{カ}}{\sqrt{\boxed{オ}}}$ である．

(3)　3点A(−2, 1, 3)，B(−3, 1, 4)，C(−3, 3, 5)について，2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ のなす角は［キク］°であり，△ABCの面積は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 46 講　空間ベクトル(2)

**例題 46 － 1**

四面体 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする．辺 AD の中点を M，辺 CD を 1：3 に内分する点を N，△ABC の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{NG}}$

**【Point Pickup】**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 46 ー 1**

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．辺 OA を 2：1 に内分する点を P，辺 BC の中点を Q，△ABC の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 46 ー 2**

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD がある．辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{MN}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ．また，$\overrightarrow{MN}$ の大きさを求めよ．

(3)　$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}$ の値を求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 46 － 2**

1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD がある．辺 AB，CD の中点をそれぞれ P，Q とし，線分 PQ の中点を R とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ として，次の問いに答えよ．

(1)　$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ．また，$\overrightarrow{AR}$ の大きさを求めよ．

(3)　$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BC}$ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 46 ー 3**

(1)　空間の 3 点 A(3, 2, 6), B(5, −1, 4), C($x$, $y$, 0) が同一直線上にあるとき，$x$, $y$ の値を求めよ．

(2)　平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を M, △BDE の重心を N とするとき，3 点 C, N, M は一直線上にあることを示せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 46 ー 3**

(1)　空間の 3 点 A$(a,\ -1,\ 5)$，B$(4,\ b,\ -7)$，C$(5,\ 5,\ -13)$ が同一直線上にあるとき，$a$，$b$ の値を求めよ．

(2)　平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を P，線分 PC を 1：2 に内分する点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$ とするとき，3 点 A，Q，G は一直線上にあることを示せ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 46 － 4**

空間の 4 点 A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, −1), D(1, 2, $z$) が同一平面上にあるとき, $z$ の値を求めよ.

【Point Pickup】



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 46 ー 4**

空間の 4 点 A(3, 1, 2), B(4, 2, 3), C(5, 2, 5), D(−2, −1, $z$) が同一平面上にあるとき，$z$ の値を求めよ.

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 46 講　空間ベクトル(2)

(1)　1 辺の長さが 2 の正四面体 OABC において，辺 OA，BC を 1：2 に内分する点をそれぞれ L，M とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ア ，$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=-\dfrac{1}{\boxed{イ}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\vec{b}+\dfrac{1}{\boxed{イ}}\vec{c}$，

$|\overrightarrow{\mathrm{LM}}|=\dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$ である．

また，$\overrightarrow{\mathrm{LM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=$ キ である．

(2)　4 点 A(1，1，0)，B(3，4，5)，C(1，3，6)，D(4，5，$z$) が同一平面上にあるとき，$z=$ ク である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 47 講　空間ベクトル(3)

**例題 47 － 1**

四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．辺 AB を 2：1 に内分する点を P とし，線分 CP を 2：1 に内分する点を Q とする．次の問いに答えよ.

(1)　$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.

(2)　辺 OA，OB の中点をそれぞれ D，E，辺 OC を 1：2 に内分する点を F とする．3 点 D，E，F を含む平面と線分 OQ の交点を R とするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.

**【Point Pickup】**

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 47 ー 1**

四面体 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする．辺 AB の中点を L，辺 AC を 3：2 に内分する点を M，辺 AD を 1：2 に内分する点を N とする．また，三角形 BCD の重心を G とし，3 点 L，M，N を含む平面と線分 AG の交点を H とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 47 － 2**

四面体 OABC において，OA＝3，OB＝OC＝4，∠BOC＝∠COA＝∠AOB＝60° である．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，平面 ABC 上に点 H をとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$　の値を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ と表すとき，$s$，$t$，$u$ に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　線分 OH と平面 ABC が垂直であるとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 47 ー 2**

四面体 OABC において，OA＝2，OB＝OC＝1，∠AOB＝∠AOC＝60°，∠BOC＝90° である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，平面 ABC に点 O から垂線 OH を下ろしたとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 47 − 3**

2点 A$(5,\ -2,\ -3)$，B$(8,\ 0,\ -4)$ を通る直線に，点 O から垂線 OH を下ろす．このとき，点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ．

**【Point Pickup】**



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 47 − 3**

2 点 A(1, 3, 0), B(0, 4, −1) を通る直線に，点 C(1, 5, −4) から垂線 CH を下ろす．このとき，点 H の座標と線分 CH の長さを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 47 ー 4**

中心の座標が $(1,\ 0,\ -3)$ で，点 $(3,\ 3,\ -1)$ を通る球面を $S$ とする．

(1)　$S$ と $xy$ 平面の交わりは円である．この円の中心と半径を求めよ．

(2)　$S$ と平面 $z=k$ の交わりが半径 1 の円になるとき，$k$ の値を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 47 ー 4**

直径の両端の座標が A(1, 2, 4), B(−5, 8, −2) である球面 $S$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$S$ の方程式を求めよ．

(2)　$S$ と $yz$ 平面の交わりは円である．この円の中心と半径を求めよ．

(3)　$S$ と平面 $y=k$ の交わりが半径 4 の円になるとき，$k$ の値を求めよ．

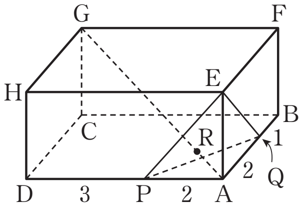
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 47 講　空間ベクトル(3)

(1)　右図のような直方体 ABCD-EFGH において，辺 AD を 2：3 に内分する点を P，辺 AB を 2：1 に内分する点を Q とし，3 点 P，Q，E を含む平面と線分 AG の交点を R とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とおくとき，

$\overrightarrow{AR}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$　である．




(2)　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，△ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=\boxed{オ}$，

$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{カ}$ である．

(3)　中心 (1，−2，3)，半径 4 の球面 $S$ が平面 $x=k$ と交わってできる円の半径が 2 になるとき $k=\boxed{キ}\pm\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第48講　整数の性質

**例題48－1**

(1)　次の数が自然数になるような最小の自然数 $n$ を求めよ．

(ア)　$\sqrt{312n}$　　　(イ)　$\sqrt{\dfrac{504}{n}}$

(2)　(ア)　2つの整数 $a$, $b$ について，$ab=32$ となる組合せ $(a,\ b)$ をすべて挙げよ．ただし，$a \geqq b$ とする．

(イ)　$\sqrt{n^2+32}$ が自然数となるような自然数 $n$ をすべて求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 48 ー 1**

(1)　次の数が自然数になるような最小の自然数 $n$ を求めよ.

(ア)　$\sqrt{2520n}$　　(イ)　$\sqrt{\dfrac{1386}{n}}$

(2)　$\sqrt{n^2+12}$ が自然数となるような自然数 $n$ をすべて求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 48 － 2**

(1)　24 の正の約数の個数を求めよ．

(2)　36，234 の最大公約数と最小公倍数を求めよ．

【Point Pickup】

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 48 ー 2**

(1)　600 の正の約数の個数を求めよ.

(2)　84，126，630 の最大公約数と最小公倍数を求めよ.



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 48 − 3**

$a$，$b$ は整数とする．$a$ を 8 で割ると 3 余り，$b$ を 8 で割ると 6 余る．次の数を 8 で割ったときの余りを求めよ．

(1)　$a+b$　　(2)　$a-b$　　(3)　$ab$

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 48 ー 3**

$a$，$b$ は整数とする．$a$ を 5 で割ると 2 余り，$b$ を 5 で割ると 3 余る．次の数を 5 で割ったときの余りを求めよ．

(1)　$a+b$　　(2)　$a-2b$　　(3)　$a^2+b^2$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 48 ー 4**

次の 2 つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ．

(1)　697，119　　(2)　1207，994

**【Point Pickup】**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 48 ー 4**

次の 2 つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ．

(1)　930，18　　(2)　1273，469

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 48 講　整数の性質

(1)　$\sqrt{n^2+7}$ が自然数となるような自然数 $n$ は $n=$ **ア** のみである.

(2)　18 の正の約数の個数は **イ** 個である. また, 18 と 60 の最大公約数は **ウ** , 最小公倍数は **エオカ** である.

(3)　$a$, $b$ は整数とする. $a$ を 7 で割ると 3 余り, $b$ を 7 で割ると 4 余る. $a+b$ を 7 で割ったときの余りは **キ** , $a-b$ を 7 で割ったときの余りは **ク** である.

(4)　533 と 7189 の最大公約数は **ケコ** である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 49 講　データの分析(1)

**例題 49 － 1**

次のデータは，10 人の生徒のハンドボール投げの結果である．

21，15，13，12，16，19，18，20，14，15　　　（単位は m）

(1)　平均値を求めよ．

(2)　中央値を求めよ．

(3)　この 10 人のデータに新たに 1 人分の生徒のデータを加えた合計 11 人のデータに関して，その平均値が 16 m となった．新たに加えた 1 人のデータの値を求めよ．また，この 11 人のデータの中央値を求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 49 ー 1**

次のデータは，ある 2 つのクラス A，B の生徒の，先週一週間において朝食を食べた回数である．

クラス A：2，1，3，5，1，7，5　　クラス B：6，1，3，3，0，2　　（単位は回）

(1)　クラス A，B を合わせた 13 人のデータの平均値を求めよ．

(2)　クラス A，クラス B の中央値をそれぞれ求めよ．

(3)　クラス A の別の生徒 1 人に新たに聞き取りを行い，この 1 人を加えた 8 人分のクラス A の平均値を出したところ，3.5 回となった．新たに聞き取りを行った生徒のデータの値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 49 ー 2**

右の表は，あるクラスの生徒 30 人が一学期の間に読んだ本の冊数を調べたものである．

(1)　このデータの最頻値を求めよ．

(2)　この表から階級値を用いて，データの平均値を求めよ．

(3)　階級値を用いないで平均値を求めたとき，データの平均値のとりうる値の範囲を求めよ．

| 階級（冊） | 度数（人） |
|---|---|
| 0 以上 2 未満 | 8 |
| 2 ～ 4 | 10 |
| 4 ～ 6 | 6 |
| 6 ～ 8 | 4 |
| 8 ～10 | 2 |
| 計 | 30 |

【Point Pickup】



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 49 ー 2**

右の表は，ある市の１日の最高気温を 30 日間調べたものである.

(1)　このデータの最頻値を求めよ.

(2)　この表から階級値を用いて，データの平均値を求めよ.

(3)　階級値を用いないで平均値を求めたとき，データの平均値のとりうる値の範囲を求めよ.

| 階級(℃) | 度数(日) |
|---|---|
| 6 以上 8 未満 | 4 |
| 8～10 | 6 |
| 10～12 | 11 |
| 12～14 | 5 |
| 14～16 | 3 |
| 16～18 | 1 |
| 計 | 30 |

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 49 － 3**

次のデータは 2 人の生徒 A，B の 10 回分の小テストの結果である．

A：6，7，5，2，5，10，7，8，7，8

B：3，4，8，6，5，　6，8，5，4，9

（単位は点）

(1)　それぞれのデータの範囲を求めよ．また，それに基づいてデータの散らばりの度合いを比較せよ．

(2)　それぞれのデータの第 1 四分位数 $Q_1$，第 2 四分位数 $Q_2$，第 3 四分位数 $Q_3$ を求めよ．

(3)　それぞれのデータの四分位範囲，四分位偏差を求めよ．また，四分位範囲に基づいて，データの散らばりの度合いを比較せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 49 ー 3**

次のデータは，Ａ町とＢ町のある年における降水日数を月ごとに調べたものである．

Ａ：3，8，12，12，6，9，12，11，13，4，7，11

Ｂ：21，19，19，10，15，8，16，8，9，8，19，26

（単位は日）

(1)　それぞれのデータの範囲を求めよ．また，それに基づいてデータの散らばりの度合いを比較せよ．

(2)　それぞれのデータの第１四分位数 $Q_1$，第２四分位数 $Q_2$，第３四分位数 $Q_3$ を求めよ．

(3)　それぞれのデータの四分位範囲，四分位偏差を求めよ．また，四分位範囲に基づいて，データの散らばりの度合いを比較せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

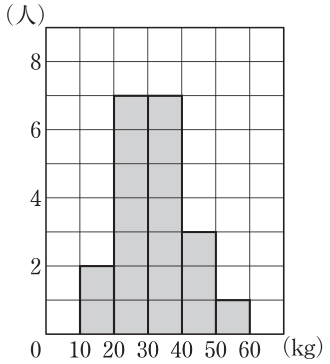
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

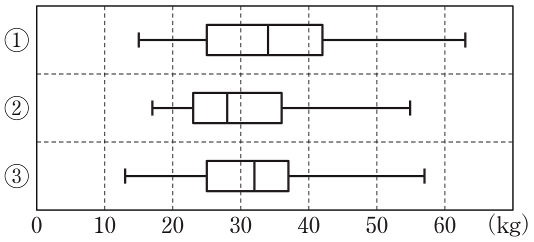
**例題 49 ー 4**

(1)　次のデータは，東京の 2003 年から 2014 年までの最低気温が 25℃以上の日数を，年ごとに調べたものである．このデータの箱ひげ図をかけ．

17，41，31，20，31，25，20，56，49，49，39，29　(単位は日)

(2)　左下の図は，生徒 20 人の握力のデータをヒストグラムに表したものである．このデータの箱ひげ図として最も適当なものを，右下の①～③から選べ．




**【Point Pickup】**



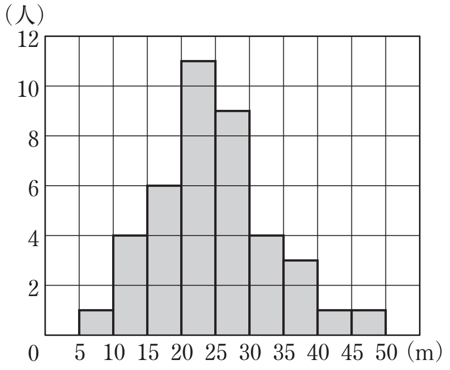
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

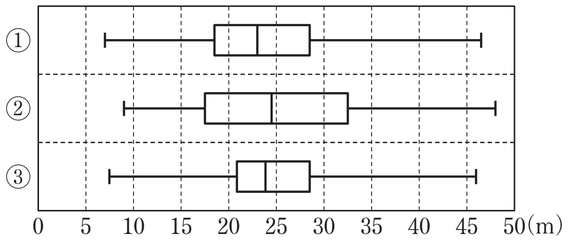
**類題 49 ー 4**

(1)　次のデータは，東京の 2004 年から 2014 年までの最高気温が 30℃以上の日数を，年ごとに調べたものである．このデータの箱ひげ図をかけ．

70，57，38，55，53，38，71，61，66，58，45　（単位は日）

(2)　左下の図は，生徒 40 人のハンドボール投げのデータをヒストグラムに表したものである．このデータの箱ひげ図として最も適当なものを，右下の①～③から選べ．






ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第49講　データの分析(1)

［1］　次のデータは，あるゲームをチームA，Bで行ったときの得点である．

A　　5，6，10，4，8，4，7，10，6，9

B　10，4，　5，9，8，3，5，　7，7，5，6，9　　（単位は点）

(1)　Aの平均値は［ア］．［イ］点，Bの平均値は［ウ］．［エ］点である．

(2)　Aの中央値は［オ］．［カ］点である．

(3)　Bの第2四分位数は［キ］．［ク］点，四分位偏差は［ケ］．［コサ］点である．

(4)　AとBのデータの散らばりの度合いは，データの範囲に基づくと［シ］の方が散らばりが大きく，四分位範囲に基づくと［ス］の方が散らばりが大きい．

［シ］，［ス］にあてはまるものを(①A　　②B)から選び，数字で答えよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 50 講　データの分析(2)

**例題 50 ― 1**

次のデータは，あるサッカーチームが 10 試合行ったときの，各試合に決めたゴール数の結果である．

0，1，4，1，5，1，3，1，0，4（単位は回）

(1)　平均値 $\overline{x}$ を求めよ．

(2)　偏差を 2 乗したものの平均値を求めることにより，分散 $s^2$ を求めよ．

(3)　各値を 2 乗したものの平均値 $\overline{x^2}$ を求めることにより，分散 $s^2$ を求めよ．

(4)　標準偏差 $s$ を求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 50 ー 1**

次のデータは，アーチスト A，B の新曲をあるレコード店でそれぞれ 5 名ずつ試聴してもらい，曲の評価を 10 点満点でつけてもらった結果である．

アーチスト A：5　7　3　6　9

アーチスト B：4　6　5　8　7　（単位は点）

(1)　アーチスト A の評価を $x$ 点とする．変量 $x$ の平均値 $\overline{x}$，標準偏差 $s_x$ を求めよ．

(2)　アーチスト B の評価を $y$ 点とする．変量 $y$ の平均値 $\overline{y}$，標準偏差 $s_y$ を求めよ．

(3)　標準偏差に基づいて，アーチスト A，B の評価の散らばりの度合いを比較せよ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 50 － 2**

下の表は2つの変量 $x$，$y$ のデータである．

| $x$ | 2 | 5 | 1 | 9 | 3 | 6 | 7 | 4 | 8 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 8 | 6 | 9 | 2 | 7 | 4 | 3 | 7 | 2 | 3 |

(1)　変量 $x$，$y$ の散布図をかけ．

(2)　$x$ と $y$ の間には相関関係があるか調べよ．相関がある場合は，正，負のどちらの相関関係があるか答えよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 50 ー 2**

次のような2つの変量 $x$, $y$ についてのデータがある．これらについて，散布図をかき，$x$ と $y$ の間に相関関係があるか調べよ．また，相関がある場合は，正，負のどちらの相関関係があるか答えよ．

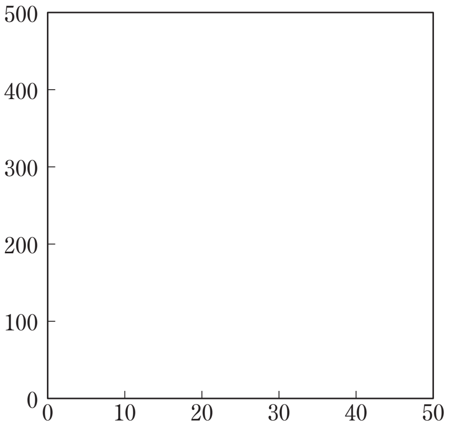
(1)

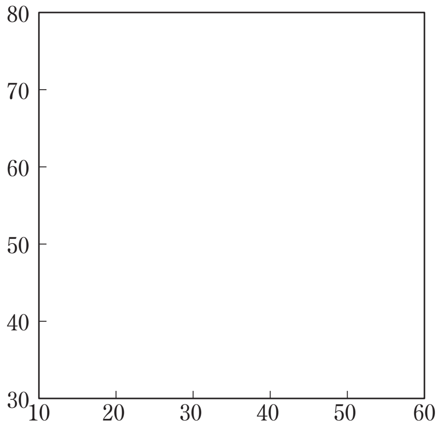
| $x$ | 20 | 25 | 35 | 40 | 30 | 45 | 15 | 25 | 10 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 170 | 190 | 330 | 380 | 240 | 420 | 80 | 210 | 110 | 200 |

(2)

| $x$ | 37 | 28 | 19 | 51 | 16 | 54 | 23 | 47 | 35 | 42 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 53 | 76 | 48 | 65 | 69 | 41 | 34 | 73 | 57 | 32 |

(散布図)

(1)



(2)





ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 50 － 3**

次の表は，2 つの変量 $x$，$y$ についてのデータである．

| $x$ | 7 | 3 | 5 | 8 | 1 | 6 | 5 | 2 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 6 | 4 | 3 | 7 | 2 | 4 | 5 | 6 | 1 |

(1)　$x$，$y$ の平均値 $\overline{x}$，$\overline{y}$ を求めよ．

(2)　$x$，$y$ の共分散 $s_{xy}$ を求めよ．

(3)　$x$ と $y$ の相関係数 $r$ を求めよ．ただし $\sqrt{15}=3.87$ とし，小数第 3 位を四捨五入して答えよ．

(4)　$x$ と $y$ の間にはどのような相関があると考えられるか．

**【Point Pickup】**



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 50 − 3**

次の表は，5人の生徒a，b，c，d，eの小テストA，Bの得点である．

| 生徒 | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 10 | 8 | 4 | 7 | 6 |
| B | 6 | 9 | 3 | 5 | 7 |

(1)　Aの得点を$x$，Bの得点を$y$とする．次の表の空欄を埋めよ．

| 生徒 | $x$ | $y$ | $x-\overline{x}$ | $y-\overline{y}$ | $(x-\overline{x})^2$ | $(y-\overline{y})^2$ | $(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | | | | | | | |
| b | | | | | | | |
| c | | | | | | | |
| d | | | | | | | |
| e | | | | | | | |
| 計 | | | | | | | |

(2)　$x$，$y$の共分散$s_{xy}$を求めよ．

(3)　小テストAと小テストBの得点の間にはどのような相関関係があると考えられるか．相関係数$r$を計算して答えよ．


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 50 － 4**

生徒 10 人の身長を調べたところ，次の表のようになった.

| 身長(cm) | 階級値 | 度数(人) |
|---|---|---|
| 145 以上 155 未満 | 150 | 1 |
| 155～165 | 160 | 2 |
| 165～175 | 170 | 5 |
| 175～185 | 180 | 1 |
| 185～195 | 190 | 1 |
| 計 | | 10 |

(1)　身長の平均値を求めよ.

(2)　170 cm を仮平均とし，身長の平均値を求めよ.

**【Point Pickup】**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 50 ー 4**

生徒 12 人の体重を調べたところ，次の表のようになった.

| 体重(kg) | 階級値 | 度数(人) |
|---|---|---|
| 45 以上 55 未満 | 50 | 2 |
| 55～65 | 60 | 2 |
| 65～75 | 70 | 6 |
| 75～85 | 80 | 1 |
| 85～95 | 90 | 1 |
| 計 | | 12 |

(1)　体重の平均値を求めよ.

(2)　70 kg を仮平均とし，体重の平均値を求めよ.

(3)　生徒の体重を $x$ kg とし，生徒の体重から 70 kg を引いた値を階級の幅 10 kg で割った値を $u$ とすると，$u$ についての度数分布表は右のようになる．$u$ の平均値 $\overline{u}$ を求めよ.
また，$70+10\overline{u}$ の値を求めよ.

| $u$ | 度数(人) |
|---|---|
| $-2$ | 2 |
| $-1$ | 2 |
| 0 | 6 |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| | 12 |

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第50講　データの分析(2)

[1]　次のデータは，生徒10名に2種類のテストA，Bを行った結果である．

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 6 | 8 | 6 | 6 | 7 | 10 | 6 | 6 | 7 | 8 |
| B | 5 | 9 | 7 | 5 | 6 | 5 | 5 | 6 | 5 | 7 |

テストAの得点を $x$ 点，テストBの得点を $y$ 点として，次の問いに答えよ．

(1)　$x$，$y$ の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とすると，$\overline{x}=$ **ア**，$\overline{y}=$ **イ** である．

(2)　$x$ の分散を $s_x{}^2$ とすると，$s_x{}^2=$ **ウ** . **エ** である．

(3)　$x$ と $y$ の共分散を $s_{xy}$ とすると，$s_{xy}=$ **オ** . **カ** である．

(4)　$x$ と $y$ の相関係数 $r$ を小数第3位を四捨五入して求めると，$r=$ **キ** . **クケ** である．

よって，$x$ と $y$ には **コ** . **コ** にあてはまるものを次の①～⑤から1つ選べ．

①　強い正の相関がある　②　弱い正の相関がある　③　相関がみられない
④　弱い負の相関がある　⑤　強い負の相関がある

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 25 講　指数関数・対数関数(1)

**例題 25 ー 1**

次の式を計算せよ．

(1)　$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}$　　(2)　$\sqrt[3]{3}\times\sqrt{27}\div\sqrt[6]{243}$

(3)　$\sqrt[4]{6}\div\sqrt{6}\times\sqrt[4]{12}$

(1)　$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4\cdot16}=\sqrt[3]{2^6}=\sqrt[3]{2^3\cdot2^3}=2\cdot2=\mathbf{4}$

(2)　$\sqrt[3]{3}\times\sqrt{27}\div\sqrt[6]{243}=3^{\frac{1}{3}}\times(3^3)^{\frac{1}{2}}\times(3^5)^{-\frac{1}{6}}$

$=3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{3}{2}}\times3^{-\frac{5}{6}}$

$=3^{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{6}}=3^1=\mathbf{3}$

(3)　$\sqrt[4]{6}\div\sqrt{6}\times\sqrt[4]{12}=(2\times3)^{\frac{1}{4}}\times(2\times3)^{-\frac{1}{2}}\times(2^2\times3)^{\frac{1}{4}}$

$=(2^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{4}})\times(2^{-\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{1}{2}})\times(2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}})$

$=2^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$

$=2^{\frac{1}{4}}\times3^0=\sqrt[4]{2}\times1=\mathbf{\sqrt[4]{2}}$

**類題 25 ー 1**

次の式を計算せよ．

(1)　$\sqrt[3]{54}\times\sqrt[3]{-2}\times\sqrt[3]{16}$　　(2)　$\sqrt[3]{\sqrt{64}}\div\sqrt{16}\times\sqrt[3]{8}$

(3)　$\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}$

(1)　$\sqrt[3]{54}\times\sqrt[3]{-2}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{3^3\times2}\times(-\sqrt[3]{2})\times\sqrt[3]{2^4}$

$=-\sqrt[3]{3^3\cdot2^6}=-\sqrt[3]{3^3\cdot2^3\cdot2^3}=-3\times2\times2=\mathbf{-12}$

※ $n$ が奇数のとき　$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$

(2)　$\sqrt[3]{\sqrt{64}}\div\sqrt{16}\times\sqrt[3]{8}=\left\{(2^6)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}\div(2^4)^{\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{6}{2\cdot3}}\div2^{\frac{4}{2}}\times2^{\frac{3}{3}}$

$=2^1\times2^{-2}\times2^1=2^0=\mathbf{1}$

(3)　$\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}=(2\times3)^{\frac{1}{2}}\times(2\times3^3)^{\frac{1}{4}}\times(2\times3)^{-\frac{1}{4}}$

$=(2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{2}})\times(2^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{3}{4}})\times(2^{-\frac{1}{4}}\times3^{-\frac{1}{4}})$

$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\times3^1=\mathbf{3\sqrt{2}}$

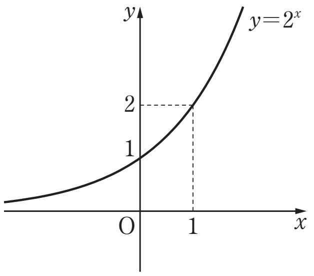
**例題25－2**

次の関数のグラフをかけ.

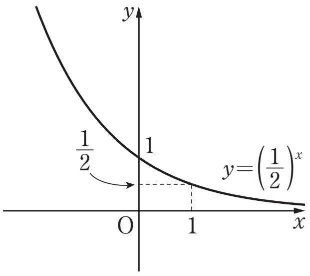
(1)　$y=2^x$　　(2)　$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

(3)　$y=2^x+1$　　(4)　$y=2^{x-1}$

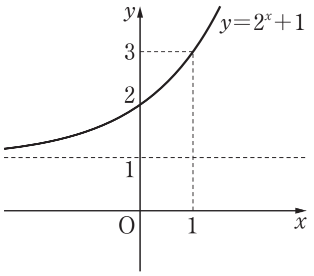
(1)



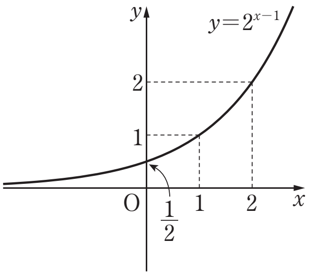

(2)




(3)




(4)

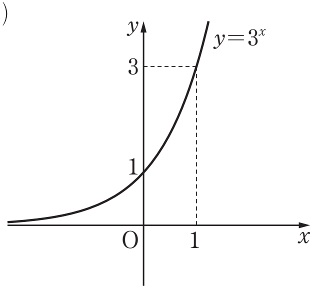



**類題25－2**

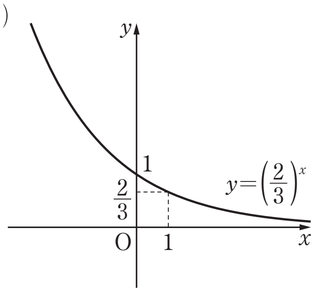
次の関数のグラフをかけ.

(1)　$y=3^x$　　(2)　$y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$　　(3)　$y=3^x-1$

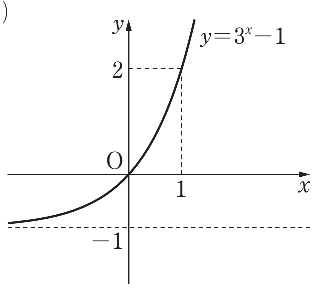
(1)




(2)




(3)




ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 25 ー 3**

次の方程式を解け.

(1)　$2^x=64$　　(2)　$9^{x+1}=\dfrac{1}{27}$　　(3)　$2^{2x}-2^{x+1}-8=0$

(1)　$2^x=64$　より　$2^x=2^6$　　よって　$\boldsymbol{x=6}$

(2)　$9^{x+1}=\dfrac{1}{27}$　より　$(3^2)^{x+1}=\dfrac{1}{3^3}$　　$3^{2x+2}=3^{-3}$

よって　$2x+2=-3$　より　$\boldsymbol{x=-\dfrac{5}{2}}$

(3)　$2^{2x}-2^{x+1}-8=0$　より　$(2^x)^2-2\cdot 2^x-8=0$

$2^x=t$　とおくと　$t>0$

このとき　$t^2-2t-8=0$　　$(t-4)(t+2)=0$　　$t=4,\ -2$

$t>0$ より　$t=4$　つまり　$2^x=4$　　$2^x=2^2$　　よって　$\boldsymbol{x=2}$

**類題 25 ー 3**

次の方程式を解け.

(1)　$\dfrac{1}{3^x}=27$　　(2)　$9^x-4\cdot 3^{x+1}+27=0$

(1)　$\dfrac{1}{3^x}=27$　より　$3^{-x}=3^3$　　よって　$-x=3$　より　$\boldsymbol{x=-3}$

(2)　$9^x-4\cdot 3^{x+1}+27=0$　より　$(3^x)^2-12\cdot 3^x+27=0$

$3^x=t$　とおくと　$t>0$

このとき　$t^2-12t+27=0$　$(t-9)(t-3)=0$　　$t=3,\ 9$（$t>0$ を満たす）

よって　$3^x=3^1,\ 3^2$　より　$\boldsymbol{x=1,\ 2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 25 − 4**

(1)　3 つの数 $\sqrt{2}$，$\sqrt[4]{8}$，$\sqrt[8]{32}$ の大小を不等号を用いて表せ.

(2)　次の不等式を解け.

(ア)　$2^x > \frac{1}{8}$　　　(イ)　$\left(\frac{1}{5}\right)^x > \frac{1}{125}$

(1)　$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[4]{8} = (2^3)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$，$\sqrt[8]{32} = (2^5)^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{5}{8}}$

底 2 は 1 より大きく，$\frac{1}{2} < \frac{5}{8} < \frac{3}{4}$　より　$\boldsymbol{\sqrt{2} < \sqrt[8]{32} < \sqrt[4]{8}}$

(2)　(ア)　$2^x > \frac{1}{8}$　より　$2^x > 2^{-3}$

底 2 は 1 より大きいので　$\boldsymbol{x > -3}$

(イ)　$\left(\frac{1}{5}\right)^x > \frac{1}{125}$　より　$\left(\frac{1}{5}\right)^x > \left(\frac{1}{5}\right)^3$

底 $\frac{1}{5}$ は 1 より小さいので　$\boldsymbol{x < 3}$

**類題 25 − 4**

(1)　3 つの数 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$，1，$\frac{1}{9}$ を小さい順に並べよ.

(2)　次の不等式を解け.

(ア)　$3^{x-1} < 243$　　　(イ)　$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} < \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$

(1)　$1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$，$\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さく，$-2 < 0 < 2$　より　$\boldsymbol{\frac{1}{9} < 1 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}$

(2)　(ア)　$3^{x-1} < 243$　より　$3^{x-1} < 3^5$

底 3 は 1 より大きいので　$x - 1 < 5$　　よって　$\boldsymbol{x < 6}$

(イ)　$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} < \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$　より　$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-3}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいので　$2x + 1 > 3x - 3$　　$-x > -4$　　よって　$\boldsymbol{x < 4}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第26講　指数関数・対数関数(2)

**例題26－1**

次の対数の値を求めよ.

(1)　$\log_2 16$　(2)　$\log_3 \frac{1}{27}$　(3)　$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{32}$

(1)　$\log_2 16 = \log_2 2^4 = \mathbf{4}$

(2)　$\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = \mathbf{-3}$

(3)　$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{32} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{2}} = \mathbf{-\frac{5}{2}}$

**類題26－1**

次の対数の値を求めよ.

(1)　$\log_5 125$　(2)　$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$　(3)　$\log_7 1$

(1)　$\log_5 125 = \log_5 5^3 = \mathbf{3}$

(2)　$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = \mathbf{-\frac{3}{2}}$

(3)　$\log_7 1 = \log_7 7^0 = \mathbf{0}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 26 − 2**

次の式を簡単にせよ．

(1) $\log_6 3+\log_6 12$　　(2) $\log_2\sqrt{3}-\log_2\sqrt{6}+\dfrac{1}{4}\log_2 4$

(3) $\log_2 3\cdot\log_3 4$　　(4) $(\log_2 9+\log_8 3)(\log_3 16+\log_9 4)$

(1) $\log_6 3+\log_6 12=\log_6(3\cdot 12)=\log_6 36=\log_6 6^2=\mathbf{2}$

(2) $\log_2\sqrt{3}-\log_2\sqrt{6}+\dfrac{1}{4}\log_2 4=\log_2\sqrt{3}-\log_2\sqrt{6}+\log_2 4^{\frac{1}{4}}$

$=\log_2\sqrt{3}-\log_2\sqrt{6}+\log_2(2^2)^{\frac{1}{4}}$

$=\log_2\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\log_2 1=\mathbf{0}$

(3) $\log_2 3\cdot\log_3 4=\log_2 3\cdot\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}=\log_2 2^2=\mathbf{2}$

(4) $(\log_2 9+\log_8 3)(\log_3 16+\log_9 4)=\left(\log_2 9+\dfrac{\log_2 3}{\log_2 8}\right)\left(\dfrac{\log_2 16}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 4}{\log_2 9}\right)$

$=\left(\log_2 3^2+\dfrac{\log_2 3}{3}\right)\left(\dfrac{4}{\log_2 3}+\dfrac{2}{\log_2 3^2}\right)$

$=\left(2\log_2 3+\dfrac{1}{3}\log_2 3\right)\left(\dfrac{4}{\log_2 3}+\dfrac{2}{2\log_2 3}\right)$

$=\dfrac{7}{3}\log_2 3\cdot\dfrac{5}{\log_2 3}=\mathbf{\dfrac{35}{3}}$

**類題 26 − 2**

次の対数の値を求めよ．

(1) $2\log_2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\log_2 3+\log_2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $(\log_2 3+\log_8 27)(\log_3 4+\log_{81} 4)$

(1) $2\log_2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\log_2 3+\log_2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\log_2(\sqrt{2})^2-\log_2 3^{\frac{1}{2}}+\log_2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\log_2\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\log_2 1=\mathbf{0}$

(2) $(\log_2 3+\log_8 27)(\log_3 4+\log_{81} 4)=\left(\log_2 3+\dfrac{\log_2 27}{\log_2 8}\right)\left(\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 4}{\log_2 81}\right)$

$=\left(\log_2 3+\dfrac{\log_2 3^3}{3}\right)\left(\dfrac{2}{\log_2 3}+\dfrac{2}{\log_2 3^4}\right)$

$=\left(\log_2 3+\dfrac{3\log_2 3}{3}\right)\left(\dfrac{2}{\log_2 3}+\dfrac{2}{4\log_2 3}\right)$

$=2\log_2 3\cdot\dfrac{5}{2\log_2 3}=\mathbf{5}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

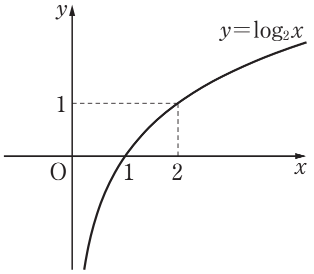
**例題 26 ー 3**

次の関数のグラフをかけ.

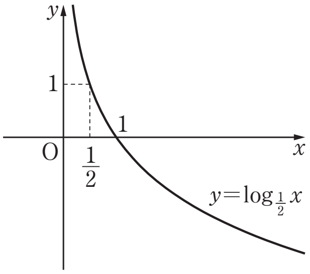
(1)　$y=\log_2 x$　　(2)　$y=\log_{\frac{1}{2}} x$

(3)　$y=\log_2 x+1$　　(4)　$y=\log_2(x-1)$

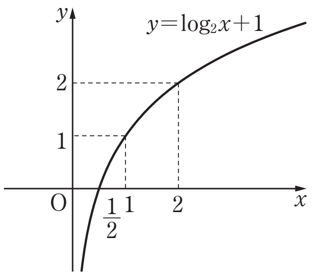
(1)



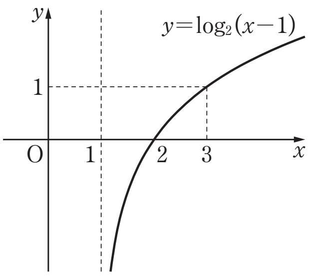

(2)




(3)




(4)

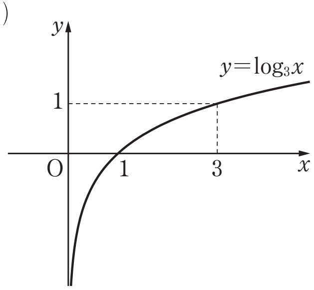



**類題 26 ー 3**

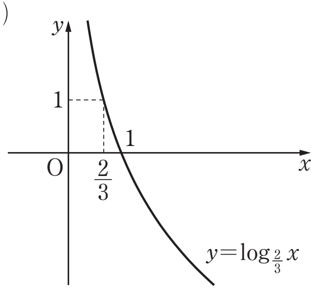
次の関数のグラフをかけ.

(1)　$y=\log_3 x$　　(2)　$y=\log_{\frac{2}{3}} x$　　(3)　$y=\log_3(x+1)$

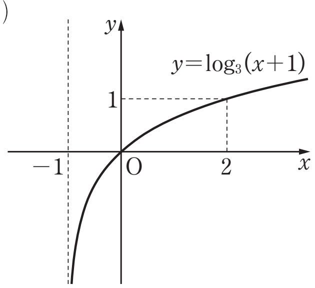
(1)




(2)




(3)




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 26 − 4**

次の方程式・不等式を解け.

(1) $\log_2 x=3$　　(2) $(\log_2 x)^2+\log_2 x^2-3=0$

(3) $\log_2 x>-1$　　(4) $\log_{\frac{1}{3}} x\leqq 2$

(1) $x=2^3=\mathbf{8}$

(2) 真数の条件より　$x>0$　かつ　$x^2>0$　　よって　$x>0$　……①

$(\log_2 x)^2+\log_2 x^2-3=0$　より　$(\log_2 x)^2+2\log_2 x-3=0$

$\log_2 x=t$　とおくと　$t^2+2t-3=0$　　$(t+3)(t-1)=0$　　$t=-3,\ 1$

よって　$\log_2 x=-3,\ 1$　より　$x=2^{-3},\ 2^1$　　したがって　$\boldsymbol{x=\frac{1}{8},\ 2}$（①を満たす）

(3) 真数の条件より　$x>0$　……①

底2は1より大きいので　$x>2^{-1}$　　したがって　$\boldsymbol{x>\frac{1}{2}}$（①を満たす）

(4) 真数の条件より　$x>0$　……①

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいので　$x\geqq\left(\frac{1}{3}\right)^2$　　つまり　$x\geqq\frac{1}{9}$

①より　$\boldsymbol{\frac{1}{9}\leqq x}$

**類題 26 − 4**

次の方程式・不等式を解け.

(1) $(\log_3 x)^2-\log_3 x^2=0$　　(2) $\log_{\frac{1}{3}} x\leqq 3$　　(3) $\log_5 x<\frac{1}{2}$

(1) 真数の条件より　$x>0$　かつ　$x^2>0$　　よって　$x>0$　……①

$(\log_3 x)^2-\log_3 x^2=0$　より　$(\log_3 x)^2-2\log_3 x=0$

$\log_3 x=t$　とおくと　$t^2-2t=0$　　$t(t-2)=0$　　$t=0,\ 2$

よって　$\log_3 x=0,\ 2$　より　$x=3^0,\ 3^2$　　したがって　$\boldsymbol{x=1,\ 9}$（①を満たす）

(2) 真数の条件より　$x>0$　……①

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいので　$x\geqq\left(\frac{1}{3}\right)^3$　　つまり　$x\geqq\frac{1}{27}$

①より　$\boldsymbol{\frac{1}{27}\leqq x}$

(3) 真数の条件より　$x>0$　……①

底5は1より大きいので　$x<5^{\frac{1}{2}}$　　したがって　$x<\sqrt{5}$

①より　$\boldsymbol{0<x<\sqrt{5}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 27 講　指数関数・対数関数(3)

**例題 27 ー 1**

$\log_{10}2=0.3010$　とする．$\log_{10}4$，$\log_{10}5$ の値を求めよ．

$\log_{10}2=0.3010$ より

$\log_{10}4=\log_{10}2^2=2\log_{10}2=2\times0.3010=\mathbf{0.6020}$

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0.3010=\mathbf{0.6990}$

**類題 27 ー 1**

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$　とする．次の表をうめよ．

| $x$ | 1 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\log_{10}x$ | | | | | | | |

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$　のとき

$\log_{10}1=0$

$\log_{10}4=\log_{10}2^2=2\log_{10}2=2\times0.3010=0.6020$

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$

$\log_{10}6=\log_{10}2\cdot3=\log_{10}2+\log_{10}3=0.3010+0.4771=0.7781$

$\log_{10}8=\log_{10}2^3=3\log_{10}2=3\times0.3010=0.9030$

$\log_{10}9=\log_{10}3^2=2\log_{10}3=2\times0.4771=0.9542$

$\log_{10}10=1$

| $x$ | 1 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\log_{10}x$ | **0** | **0.6020** | **0.6990** | **0.7781** | **0.9030** | **0.9542** | **1** |

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 27 ー 2**

(1)　次の表をうめよ．

| $x$ | 1 | 10 | 100 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\log_{10}x$ | | | | | |

(2)　$10^{2.5}$ は整数部分が何桁の数か．

(3)　$2^{50}$ は何桁の数か．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする．

(1)

| $x$ | 1 | 10 | 100 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\log_{10}x$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |

(2)　$10^2<10^{2.5}<10^3$　より　**$10^{2.5}$ は整数部分が 3 桁の数**である．

(3)　$\log_{10}2^{50}=50\log_{10}2=50\times0.3010=15.05$

よって　$2^{50}=10^{15.05}$　より　$10^{15}<2^{50}<10^{16}$

したがって　**$2^{50}$ は 16 桁の数**である．

**類題 27 ー 2**

$6^{30}$ は何桁の数か．ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．

$\log_{10}6^{30}=30\log_{10}6=30\log_{10}(2\times3)=30(\log_{10}2+\log_{10}3)$

$=30(0.3010+0.4771)=23.343$

よって　$6^{30}=10^{23.343}$　より　$10^{23}<6^{30}<10^{24}$

したがって　**$6^{30}$ は 24 桁の数**である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 27 ー 3**

(1)　次の表をうめよ.

| $x$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 |
|---|---|---|---|---|
| $\log_{10}x$ | | | | |

(2)　$10^{-2.5}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか.

(3)　$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{30}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする.

(1)

| $x$ | $0.1=10^{-1}$ | $0.01=10^{-2}$ | $0.001=10^{-3}$ | $0.0001=10^{-4}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\log_{10}x$ | **−1** | **−2** | **−3** | **−4** |

(2)　$10^{-3}<10^{-2.5}<10^{-2}$　より　$10^{-2.5}$ は**小数第 3 位**に初めて 0 でない数字が現れる.

(3)　$\log_{10}\left(\dfrac{1}{8}\right)^{30}=30\log_{10}2^{-3}=-90\log_{10}2=-90\times0.3010=-27.09$

よって　$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{30}=10^{-27.09}$　より　$10^{-28}<\left(\dfrac{1}{8}\right)^{30}<10^{-27}$

したがって　$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{30}$ は**小数第 28 位**に初めて 0 でない数字が現れる.

**類題 27 ー 3**

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^{30}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする.

$\log_{10}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{30}=30\log_{10}\dfrac{3}{5}=30(\log_{10}3-\log_{10}5)=30\{\log_{10}3-(1-\log_{10}2)\}$

$=30(\log_{10}2+\log_{10}3-1)=30\times(0.3010+0.4771-1)=-6.657$

よって　$\left(\dfrac{3}{5}\right)^{30}=10^{-6.657}$　より　$10^{-7}<10^{-6.657}<10^{-6}$

したがって　$\left(\dfrac{3}{5}\right)^{30}$ は**小数第 7 位**に初めて 0 でない数字が現れる.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 27 － 4**

(1)　$\left(\dfrac{5}{3}\right)^n > 3000$ を満たす最小の自然数 $n$ を求めよ．ただし $\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ とする．

(2)　$3^x = 5^y = \sqrt{15}$ のとき，$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ の値を求めよ．

(1)　$\left(\dfrac{5}{3}\right)^n > 3000$ について，両辺の常用対数をとると　$\log_{10}\left(\dfrac{5}{3}\right)^n > \log_{10}3000$　……①

$$\log_{10}\left(\frac{5}{3}\right)^n = n\log_{10}\frac{10}{6} = n(1-\log_{10}2-\log_{10}3) = n(1-0.3010-0.4771) = 0.2219n$$

$$\log_{10}3000 = \log_{10}(3\times10^3) = \log_{10}3+3 = 0.4771+3 = 3.4771$$

よって①は　$0.2219n > 3.4771$　　よって　$n > \dfrac{3.4771}{0.2219} = 15.6\cdots\cdots$

したがって求める最小の自然数は　$\boldsymbol{n=16}$

(2)　$3^x = \sqrt{15}$ より　$x = \log_3\sqrt{15} = \log_3(3\times5)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(1+\log_3 5)$

$5^y = \sqrt{15}$ より　$y = \log_5\sqrt{15} = \dfrac{\log_3\sqrt{15}}{\log_3 5} = \dfrac{1+\log_3 5}{2\log_3 5}$

よって　$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{1+\log_3 5} + \dfrac{2\log_3 5}{1+\log_3 5} = \dfrac{2(1+\log_3 5)}{1+\log_3 5} = \boldsymbol{2}$

**(別解)**　$3^x = \sqrt{15}$ より　$x = \log_3\sqrt{15}$

$5^y = \sqrt{15}$ より　$y = \log_5\sqrt{15} = \dfrac{\log_3\sqrt{15}}{\log_3 5}$

よって　$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\log_3\sqrt{15}} + \dfrac{\log_3 5}{\log_3\sqrt{15}} = \dfrac{\log_3 3+\log_3 5}{\log_3\sqrt{15}} = \dfrac{\log_3 15}{\frac{1}{2}\log_3 15} = 2$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 27 − 4**

(1)　$\left(\dfrac{5}{4}\right)^n<6000$ を満たす最大の自然数 $n$ を求めよ．ただし $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする．

(2)　$2^x=3^y=6\sqrt{6}$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の値を求めよ．

(1)　$\left(\dfrac{5}{4}\right)^n<6000$ について，両辺の常用対数をとると　$\log_{10}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n<\log_{10}6000$　……①

$$\log_{10}\left(\frac{5}{4}\right)^n=n\log_{10}\frac{10}{8}=n(1-3\log_{10}2)=n(1-3\times0.3010)=0.097n$$

$$\log_{10}6000=\log_{10}(2\times3\times10^3)=\log_{10}2+\log_{10}3+3=0.3010+0.4771+3=3.7781$$

よって①は　$0.097n<3.7781$　　よって　$n<\dfrac{3.7781}{0.097}=38.9\cdots\cdots$

したがって求める最大の自然数は　$\boldsymbol{n=38}$

(2)　$2^x=6\sqrt{6}$ より　$x=\log_2 6\sqrt{6}=\log_2 6^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}\log_2(2\times3)=\dfrac{3}{2}(1+\log_2 3)$

$3^y=6\sqrt{6}$ より　$y=\log_3 6\sqrt{6}=\dfrac{\log_2 6\sqrt{6}}{\log_2 3}=\dfrac{3(1+\log_2 3)}{2\log_2 3}$

よって　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3(1+\log_2 3)}+\dfrac{2\log_2 3}{3(1+\log_2 3)}=\dfrac{2(1+\log_2 3)}{3(1+\log_2 3)}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

**(別解)**　$2^x=6\sqrt{6}$ より　$x=\log_2 6\sqrt{6}$

$3^y=6\sqrt{6}$ より　$y=\log_3 6\sqrt{6}=\dfrac{\log_2 6\sqrt{6}}{\log_2 3}$

よって

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\log_2 6\sqrt{6}}+\frac{\log_2 3}{\log_2 6\sqrt{6}}$$

$$=\frac{1+\log_2 3}{\log_2 6\sqrt{6}}=\frac{\log_2 2+\log_2 3}{\log_2 6^{\frac{3}{2}}}=\frac{\log_2 6}{\frac{3}{2}\log_2 6}=\frac{2}{3}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第28講　式と証明(1)

**例題28－1**

(1)　$(2x-3y)^5$ を展開せよ.

(2)　$(3-x)^{10}$ を展開したときの $x^7$ の係数を求めよ.

(1)　$(2x-3y)^5={}_5C_0(2x)^5+{}_5C_1(2x)^4(-3y)$

$+{}_5C_2(2x)^3(-3y)^2+{}_5C_3(2x)^2(-3y)^3+{}_5C_4(2x)(-3y)^4+{}_5C_5(-3y)^5$

$=\mathbf{32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3+810xy^4-243y^5}$

(2)　$(3-x)^{10}$ の展開式の一般項は

${}_{10}C_r 3^{10-r}(-x)^r$

$x^7$ の項は $r=7$ のとき　　よって求める係数は　${}_{10}C_7 3^3\cdot(-1)^7=\mathbf{-3240}$

**類題28－1**

(1)　$(a-b)^6$ を展開せよ.

(2)　$(2x-7)^5$ を展開したときの $x^3$ の係数を求めよ.

(1)　$(a-b)^6={}_6C_0a^6+{}_6C_1a^5(-b)+{}_6C_2a^4(-b)^2$

$+{}_6C_3a^3(-b)^3+{}_6C_4a^2(-b)^4+{}_6C_5a(-b)^5+{}_6C_6(-b)^6$

$=\mathbf{a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6}$

(2)　$(2x-7)^5$ の展開式の一般項は

${}_5C_r(2x)^{5-r}(-7)^r={}_5C_r2^{5-r}(-7)^rx^{5-r}$

$x^3$ の項は $r=2$ のとき　　よって求める係数は　${}_5C_2 2^3(-7)^2=\mathbf{3920}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 28 － 2**

(1)　$x^3+2x-3$ を $x^2+2x-1$ で割った商と余りを求めよ．

(2)　整式 $P$ を $x^2-2x-1$ で割ると，商が $2x-3$，余りが $-2x$ になった．このとき，整式 $P$ を求めよ．

(1)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x \quad -2 \\
\hline
x^2+2x-1 & x^3 \qquad\quad +2x-3 \\
 & x^3+2x^2-\ x \\
\hline
 & \quad -2x^2+3x-3 \\
 & \quad -2x^2-4x+2 \\
\hline
 & \qquad\qquad 7x-5
\end{array}
$$

よって　**商**　$\boldsymbol{x-2}$　　**余り**　$\boldsymbol{7x-5}$

(2)　$P=(x^2-2x-1)\times(2x-3)-2x=\boldsymbol{2x^3-7x^2+2x+3}$

**類題 28 － 2**

(1)　$2x^3-5x^2+4x-1$ を $x^2-x+1$ で割った商と余りを求めよ．

(2)　整式 $x^3-2x^2-4x+8$ を整式 $A$ で割ると，商が $x+1$，余りが $-5x+4$ になった．このとき，整式 $A$ を求めよ．

(1)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x \quad -3 \\
\hline
x^2-x+1 & 2x^3-5x^2+4x-1 \\
 & 2x^3-2x^2+2x \\
\hline
 & \quad -3x^2+2x-1 \\
 & \quad -3x^2+3x-3 \\
\hline
 & \qquad\quad -\ x+2
\end{array}
$$

よって　**商**　$\boldsymbol{2x-3}$　　**余り**　$\boldsymbol{-x+2}$

(2)　$x^3-2x^2-4x+8=A\times(x+1)-5x+4$

$x^3-2x^2+x+4=A\times(x+1)$

よって $x^3-2x^2+x+4$ は $x+1$ で割り切れ，

その商が $A$ である．

したがって　$\boldsymbol{A=x^2-3x+4}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-3x\ +4 \\
\hline
x+1 & x^3-2x^2+\ x+4 \\
 & x^3+\ x^2 \\
\hline
 & -3x^2+\ x \\
 & -3x^2-3x \\
\hline
 & \qquad\quad 4x+4 \\
 & \qquad\quad 4x+4 \\
\hline
 & \qquad\qquad\ 0
\end{array}
$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 28 － 3**

次の式を計算せよ．

(1) $\dfrac{x^2-11x+24}{x^2-6x-16}\times\dfrac{x^2+2x}{x^2-6x+9}$　　(2) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}$

(3) $\dfrac{x+2}{x-\dfrac{2}{x+1}}$

(1) $(\text{与式})=\dfrac{(x-3)(x-8)}{(x+2)(x-8)}\times\dfrac{x(x+2)}{(x-3)^2}=\boldsymbol{\dfrac{x}{x-3}}$

(2) $(\text{与式})=\dfrac{x(x+2)-2(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\boldsymbol{\dfrac{x^2-2}{(x+1)(x+2)}}$

(3) $(\text{与式})=\dfrac{(x+2)\times(x+1)}{\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right)\times(x+1)}=\dfrac{(x+2)(x+1)}{x(x+1)-2}=\dfrac{(x+2)(x+1)}{x^2+x-2}$

$=\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-1)}=\boldsymbol{\dfrac{x+1}{x-1}}$

**類題 28 － 3**

次の式を計算せよ．

(1) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x}\div\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$　　(2) $\dfrac{3}{(x+1)(x-2)}+\dfrac{x-6}{(x-2)(x+2)}$

(3) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$

(1) $(\text{与式})=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x}\times\dfrac{x^2+2x}{x^2+5x+6}=\dfrac{(x-2)(x+3)}{x(x-1)}\times\dfrac{x(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\boldsymbol{\dfrac{x-2}{x-1}}$

(2) $(\text{与式})=\dfrac{3(x+2)+(x-6)(x+1)}{(x+1)(x-2)(x+2)}=\dfrac{x^2-2x}{(x+1)(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+2)}=\boldsymbol{\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}}$

(3) $(\text{与式})=\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\times x}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\times x}=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\boldsymbol{x+1}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 28 − 4**

次の等式が $x$ についての恒等式となるように，定数 $a$，$b$，$c$ の値を定めよ．

(1)　$x^2=a(x+2)^2+b(x+3)^2+c(x+2)(x+3)$

(2)　$\dfrac{2x-1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$

(1)　(右辺)$=(a+b+c)x^2+(4a+6b+5c)x+4a+9b+6c$

$x$ について左辺と係数比較して

$a+b+c=1$，$4a+6b+5c=0$，$4a+9b+6c=0$

これらより　$\boldsymbol{a=9}$**，**$\boldsymbol{b=4}$**，**$\boldsymbol{c=-12}$

**(別解)**　与えられた等式が恒等式となるとき

$x=-3$ を代入して　$a=9$

$x=-2$ を代入して　$b=4$

$x=-1$ を代入して　$a+4b+2c=1$

これらより　$a=9$，$b=4$，$c=-12$

このとき　(右辺)$=9(x+2)^2+4(x+3)^2-12(x+2)(x+3)$

$=9x^2+36x+36+4x^2+24x+36-(12x^2+60x+72)=x^2$　より

与えられた等式は確かに恒等式となる．

したがって　$a=9$，$b=4$，$c=-12$

(2)　(右辺)$=\dfrac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}$

$x$ について左辺と係数比較して

$2=a+b$，$-1=2a+b$

よって　$\boldsymbol{a=-3}$**，**$\boldsymbol{b=5}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 28 ー 4**

次の等式が $x$ についての恒等式となるように，定数 $a$，$b$，$c$ の値を定めよ.

(1)　$2x^2+3x-1=ax(x+1)+bx(x-1)+c(x+1)(x-1)$

(2)　$\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

(1)　(右辺)$=(a+b+c)x^2+(a-b)x-c$

左辺と係数比較して　$a+b+c=2$，$a-b=3$，$-c=-1$

よって　$\boldsymbol{a=2,\ b=-1,\ c=1}$

**(別解)**　$x=0$，$x=1$，$x=-1$ を代入するとそれぞれ

$-c=-1$，$2a=4$，$2b=-2$　となる.

よって　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

このとき　(右辺)$=2x(x+1)-x(x-1)+(x+1)(x-1)$

$=2x^2+2x-x^2+x+x^2-1$

$=2x^2+3x-1$

$=$(左辺)　より

与えられた等式は確かに恒等式となる.

したがって　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

(2)　(右辺)$=\dfrac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c}{x^3-1}$

左辺と係数比較して　$a+b=0$，$a-b+c=0$，$a-c=3$

よって　$\boldsymbol{a=1,\ b=-1,\ c=-2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 29 講　式と証明(2)

**例題 29 ー 1**

次の等式を証明せよ．

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$$

$$(右辺)=\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2)$$

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2)=a^2+b^2$$

$$=(左辺)$$

**類題 29 ー 1**

次の等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$$

$$(右辺)=\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ca+a^2)$$

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$$

$$=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$$

$$=(左辺)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 29 － 2**

次の等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$a+b+c=0$ のとき　$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき　$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

(1)　$a+b+c=0$　より　$c=-a-b$

$$2a^2+bc=2a^2+b(-a-b)=2a^2-ab-b^2$$

$$\begin{aligned}(b-a)(c-a)&=(b-a)\{(-a-b)-a\}=(b-a)(-2a-b)\\&=-2ab-b^2+2a^2+ab=2a^2-ab-b^2\end{aligned}$$

よって　$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk,\ c=dk$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{bk-b}{b}=\frac{b(k-1)}{b}=k-1$$

$$\frac{c-d}{d}=\frac{dk-d}{d}=\frac{d(k-1)}{d}=k-1$$

よって　$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

**類題 29 － 2**

次の等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$a+b+c=0$ のとき　$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$

(2)　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

(1)　$a+b+c=0$　より　$c=-a-b$

このとき

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a)+abc&=(a+b)(b-a-b)(-a-b+a)+ab(-a-b)\\&=(a+b)\cdot(-a)\cdot(-b)-a^2b-ab^2\\&=a^2b+ab^2-a^2b-ab^2=0\end{aligned}$$

(2)　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと　$x=ak,\ y=bk,\ z=ck$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{k^2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}=k^2$$

$$\frac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}=\frac{ak\cdot bk+bk\cdot ck+ck\cdot ak}{ab+bc+ca}=\frac{k^2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}=k^2$$

よって　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 29 － 3**

次の不等式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

(1)　$x^2-x+1 \geqq x$　　(2)　$x^2-6x+10>0$

(3)　$x^2-2x+y^2+4y+5 \geqq 0$　　(4)　$x^2+2y^2-2xy+4y>-5$

(1)　$(x^2-x+1)-x=x^2-2x+1=(x-1)^2 \geqq 0$

よって　$x^2-x+1 \geqq x$

等号成立は　$x=1$ のとき

(2)　$x^2-6x+10=(x-3)^2+1>0$

(3)　$x^2-2x+y^2+4y+5=(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+5=(x-1)^2+(y+2)^2 \geqq 0$

等号成立は　$x=1$，$y=-2$ のとき

(4)　$x^2+2y^2-2xy+4y-(-5)=x^2-2xy+2y^2+4y+5$

$$=(x-y)^2-y^2+2y^2+4y+5$$

$$=(x-y)^2+y^2+4y+5$$

$$=(x-y)^2+(y+2)^2-4+5$$

$$=(x-y)^2+(y+2)^2+1>0$$

よって　$x^2+2y^2-2xy+4y>-5$

**類題 29 － 3**

次の不等式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

(1)　$x^2+3x>-3$

(2)　$x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2 \geqq 0$

(1)　$x^2+3x-(-3)=x^2+3x+3=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+3=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

よって　$x^2+3x>-3$

(2)　$x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2=x^2-2(y-1)x+5y^2+2y+2$

$$=\{x-(y-1)\}^2-(y-1)^2+5y^2+2y+2$$

$$=(x-y+1)^2+4y^2+4y+1$$

$$=(x-y+1)^2+(2y+1)^2 \geqq 0$$

等号成立は　$x-y+1=0$ かつ $2y+1=0$　つまり　$x=-\dfrac{3}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$ のとき

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 29 － 4**

次の不等式を証明せよ.

(1)　$x>3$，$y>4$ のとき　$xy>4x+3y-12$

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき　$\sqrt{2a+2b} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

(3)　$\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \geqq |a|+|b|$

(1)　$xy-(4x+3y-12)=xy-4x-3y+12$

$=(x-3)(y-4)-12+12=(x-3)(y-4)$

$x>3$，$y>4$ より　$x-3>0$，$y-4>0$

よって　$(x-3)(y-4)>0$

したがって　$xy>4x+3y-12$

(2)　$(\sqrt{2a+2b})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(2a+2b)-(a+2\sqrt{ab}+b)=a-2\sqrt{ab}+b$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$

よって　$(\sqrt{2a+2b})^2 \geqq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$a>0$，$b>0$ より　$\sqrt{2a+2b}>0$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$

したがって　$\sqrt{2a+2b} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

(3)　$(\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2})^2-(|a|+|b|)^2=2(a^2+b^2)-(a^2+2|a||b|+b^2)$

$=a^2-2|ab|+b^2$

$=(|a|-|b|)^2 \geqq 0$

よって　$(\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2})^2 \geqq (|a|+|b|)^2$

$\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \geqq 0$，$|a|+|b| \geqq 0$　より　$\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \geqq |a|+|b|$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 29 ー 4**

次の不等式を証明せよ.

(1)　$x<-3$, $y<2$ のとき　$xy>2x-3y+6$

(2)　$\sqrt{2(x^2+y^2)}\geqq|x|+|y|\geqq\sqrt{x^2+y^2}$

(1)　$xy-(2x-3y+6)=xy-2x+3y-6$

$=(x+3)(y-2)+6-6=(x+3)(y-2)$

$x<-3$, $y<2$ より　$x+3<0$, $y-2<0$

よって　$(x+3)(y-2)>0$

したがって　$xy>2x-3y+6$

(2)　$\{\sqrt{2(x^2+y^2)}\}^2-(|x|+|y|)^2=2(x^2+y^2)-(x^2+2|xy|+y^2)$

$=x^2-2|xy|+y^2$

$=(|x|-|y|)^2\geqq 0$

よって　$\{\sqrt{2(x^2+y^2)}\}^2\geqq(|x|+|y|)^2$

$\sqrt{2(x^2+y^2)}\geqq 0$, $|x|+|y|\geqq 0$　より　$\sqrt{2(x^2+y^2)}\geqq|x|+|y|$

$(|x|+|y|)^2-(\sqrt{x^2+y^2})^2=x^2+2|xy|+y^2-(x^2+y^2)$

$=2|xy|\geqq 0$

よって　$(|x|+|y|)^2\geqq(\sqrt{x^2+y^2})^2$

$|x|+|y|\geqq 0$, $\sqrt{x^2+y^2}\geqq 0$　より　$|x|+|y|\geqq\sqrt{x^2+y^2}$

以上より　$\sqrt{2(x^2+y^2)}\geqq|x|+|y|\geqq\sqrt{x^2+y^2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 30 講　式と証明(3)・複素数と方程式(1)

**例題 30 ー 1**

$a>0$，$b>0$ とする．次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つのはどういうときか．

(1)　$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$　　(2)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

(1)　$a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}=2$

等号成立は　$a=\dfrac{1}{a}$ より　$a^2=1$　　$a>0$ より　$a=1$ のとき

(2)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=ab+4+1+\dfrac{4}{ab}=ab+\dfrac{4}{ab}+5$

$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$ab+\dfrac{4}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\dfrac{4}{ab}}=2\cdot 2=4$

よって　$ab+\dfrac{4}{ab}+5\geqq 4+5=9$

したがって　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

等号成立は　$ab=\dfrac{4}{ab}$　　つまり　$ab=2$ のとき

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 30 − 1**

$a>0$，$b>0$ とする．次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つのはどういうときか．

(1)　$a+1+\dfrac{12}{a+1}\geqq 4\sqrt{3}$　　(2)　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 8$

(1)　$a+1>0$，$\dfrac{12}{a+1}>0$ より　(相加平均)$\geqq$(相乗平均) から

$a+1+\dfrac{12}{a+1}\geqq 2\sqrt{(a+1)\cdot\dfrac{12}{a+1}}=2\times\sqrt{12}=4\sqrt{3}$

等号成立は　$a+1=\dfrac{12}{a+1}$　より　$(a+1)^2=12$

$a+1>0$ より　$a+1=2\sqrt{3}$

つまり　$a=2\sqrt{3}-1$　のとき

(2)　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+2=\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+4$

$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{4b}{a}>0$ より　(相加平均)$\geqq$(相乗平均) から

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{4b}{a}}=2\times 2=4$

よって　$\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+4\geqq 4+4=8$

したがって　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 8$

等号成立は　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{4b}{a}$　　$a^2=4b^2$　　つまり　$a=2b$ のとき

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 30 − 2**

(1)　$x>0$ のとき　$x+\dfrac{2}{x}$ の最小値と，そのときの $x$ の値を求めよ．

(2)　$a>0$，$b>0$，$ab=16$ のとき，$a+b$ の最小値を求めよ．

(1)　$x>0$，$\dfrac{2}{x}>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$x+\dfrac{2}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{2}{x}}=2\sqrt{2}$

等号成立は　$x=\dfrac{2}{x}$ より　$x=\sqrt{2}$ のとき

よって　$x+\dfrac{2}{x}$ は　**$x=\sqrt{2}$ のとき　最小値 $2\sqrt{2}$ をとる．**

(2)　$a>0$，$b>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$a+b\geqq 2\sqrt{ab}=2\sqrt{16}=2\cdot 4=8$

等号成立は　$a=b$　かつ　$ab=16$　より　$a=b=4$ のとき

よって　$a+b$ の**最小値は 8**（$a=b=4$ のとき）

**類題 30 − 2**

(1)　$x>-2$ のとき　$x+2+\dfrac{16}{x+2}$ の最小値と，そのときの $x$ の値を求めよ．

(2)　$a>0$，$b>0$，$ab=12$ のとき，$a+2b$ の最小値を求めよ．

(1)　$x+2>0$，$\dfrac{16}{x+2}>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$x+2+\dfrac{16}{x+2}\geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\dfrac{16}{x+2}}=2\cdot 4=8$

等号成立は　$x+2=\dfrac{16}{x+2}$ より　$(x+2)^2=16$　$x+2=4$

つまり　$x=2$　のとき

よって　$x+2+\dfrac{16}{x+2}$ は　**$x=2$ のとき　最小値 8 をとる．**

(2)　$a>0$，$2b>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$a+2b\geqq 2\sqrt{a\cdot 2b}=2\sqrt{2ab}=2\sqrt{2\cdot 12}=2\cdot 2\sqrt{6}=4\sqrt{6}$

等号成立は　$a=2b$　かつ　$ab=12$　より　$a=2\sqrt{6}$，$b=\sqrt{6}$ のとき

よって　$a+2b$ の**最小値は $4\sqrt{6}$**（$a=2\sqrt{6}$，$b=\sqrt{6}$ のとき）

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 30 ー 3**

(1)　次の計算をせよ.

(ア)　$(5-4i)+(2+2i)$　　(イ)　$(3-4i)^2$　　(ウ)　$\dfrac{1}{2+i}$

(2)　次の等式を満たす実数 $x$, $y$ の値を求めよ.

(ア)　$x+3i=-4+yi$　　(イ)　$(4+2i)x+(1+4i)y=-7$

(1)　(ア)　$(5-4i)+(2+2i)=5-4i+2+2i$

$$=(5+2)+(-4+2)i$$

$$=\mathbf{7-2}\boldsymbol{i}$$

(イ)　$(3-4i)^2=9-24i+16i^2$

$$=9-24i+16\cdot(-1)$$

$$=\mathbf{-7-24}\boldsymbol{i}$$

(ウ)　$\dfrac{1}{2+i}=\dfrac{2-i}{(2+i)(2-i)}$

$$=\frac{2-i}{4-i^2}=\frac{2-i}{4-(-1)}$$

$$=\frac{2-i}{5}=\mathbf{\frac{2}{5}-\frac{1}{5}}\boldsymbol{i}$$

(2)　(ア)　$x$, $y$ は実数より　$\boldsymbol{x}=\mathbf{-4}$, $\boldsymbol{y}=\mathbf{3}$

(イ)　$(4+2i)x+(1+4i)y+7=0$　より　$(4x+y+7)+(2x+4y)i=0$

$4x+y+7$, $2x+4y$ は実数より　$4x+y+7=0$, $2x+4y=0$

よって　$\boldsymbol{x}=\mathbf{-2}$, $\boldsymbol{y}=\mathbf{1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 30 － 3**

(1)　次の計算をせよ．

(ア)　$(3+2i)-(2-i)$　(イ)　$(3+5i)^2$　(ウ)　$\dfrac{3+2i}{2-i}$

(2)　次の等式を満たす実数 $x$，$y$，$a$，$b$ の値を求めよ．

(ア)　$(1-2i)(x+yi)=2+6i$　(イ)　$\dfrac{a+2i}{1+3i}=1+bi$

(1)　(ア)　$(3+2i)-(2-i)=3+2i-2+i$

$=(3-2)+(2+1)i=\mathbf{1+3i}$

(イ)　$(3+5i)^2=9+30i+25i^2$

$=9+30i+25\cdot(-1)=\mathbf{-16+30i}$

(ウ)　$\dfrac{3+2i}{2-i}=\dfrac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$=\dfrac{6+7i+2i^2}{4-i^2}=\dfrac{6+7i+2\cdot(-1)}{4-(-1)}$

$=\dfrac{4+7i}{5}=\mathbf{\dfrac{4}{5}+\dfrac{7}{5}i}$

(2)　(ア)　$(1-2i)(x+yi)=2+6i$　より　$x+yi-2xi+2y=2+6i$

つまり　$(x+2y)+(y-2x)i=2+6i$

$x+2y$，$y-2x$ は実数より　$x+2y=2$，$y-2x=6$

$\mathbf{x=-2,\ y=2}$

(イ)　$\dfrac{a+2i}{1+3i}=\dfrac{(a+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{a-3ai+2i+6}{1+9}$

$=\dfrac{(a+6)+(-3a+2)i}{10}=\dfrac{a+6}{10}+\dfrac{-3a+2}{10}i$

よって与式は　$\dfrac{a+6}{10}+\dfrac{-3a+2}{10}i=1+bi$　と変形できる．

$\dfrac{a+6}{10}$，$\dfrac{-3a+2}{10}$，$b$ は実数より　$\dfrac{a+6}{10}=1$，$\dfrac{-3a+2}{10}=b$

よって　$\mathbf{a=4,\ b=-1}$

**(別解)**　$\dfrac{a+2i}{1+3i}=1+bi$　より

$a+2i=(1+bi)(1+3i)=1+3i+bi-3b=(1-3b)+(3+b)i$

$a$，$1-3b$，$3+b$ は実数より　$a=1-3b$，$2=3+b$

よって　$a=4$，$b=-1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 30 ー 4**

(1)　次の2次方程式を解け.

　(ア)　$x^2=-4$　　(イ)　$x^2-2x+3=0$

(2)　$a$ を定数とする. 2次方程式 $4x^2+(a-1)x+1=0$ の解の種類を判別せよ.

(1)　(ア)　$x=\pm\sqrt{-4}=\pm \boldsymbol{2i}$

　(イ)　$x=1\pm\sqrt{1-3}=1\pm\sqrt{-2}=\boldsymbol{1\pm\sqrt{2}\,i}$

(2)　2次方程式 $4x^2+(a-1)x+1=0$　の判別式を $D$ とすると

$$D=(a-1)^2-4\cdot4\cdot1=a^2-2a-15=(a+3)(a-5)$$

$D>0$　つまり　$\boldsymbol{a<-3,\ 5<a}$　**のとき**　**異なる2つの実数解**

$D=0$　つまり　$\boldsymbol{a=-3,\ 5}$　**のとき**　**重解**

$D<0$　つまり　$\boldsymbol{-3<a<5}$　**のとき**　**異なる2つの虚数解**

**類題 30 ー 4**

(1)　次の2次方程式を解け.

　(ア)　$x^2=-5$　　(イ)　$x^2+4\sqrt{3}x+13=0$

(2)　$a$ を定数とする. 2次方程式 $2x^2-2ax-a^2+3=0$ の解の種類を判別せよ.

(1)　(ア)　$x=\pm\sqrt{-5}=\boldsymbol{\pm\sqrt{5}\,i}$

　(イ)　$x=-2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-13}=-2\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}=\boldsymbol{-2\sqrt{3}\pm i}$

(2)　2次方程式 $2x^2-2ax-a^2+3=0$　の判別式を $D$ とすると

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-2\cdot(-a^2+3)=3a^2-6=3(a^2-2)$$

$D>0$　つまり　$a^2-2>0$　より　$\boldsymbol{a<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<a}$　**のとき**　**異なる2つの実数解**

$D=0$　つまり　$a^2-2=0$　より　$\boldsymbol{a=\pm\sqrt{2}}$　**のとき**　**重解**

$D<0$　つまり　$a^2-2<0$　より　$\boldsymbol{-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}}$　**のとき**　**異なる2つの虚数解**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 31 講　複素数と方程式(2)

**例題 31 − 1**

2 次方程式 $2x^2-2x+1=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，次の式の値を求めよ．

(ア)　$\alpha^2+\beta^2$　　(イ)　$\alpha^3+\beta^3$　　(ウ)　$(\alpha-\beta)^2$

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-\dfrac{-2}{2}=1$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$

(ア)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=\mathbf{0}$

(イ)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot1=\mathbf{-\dfrac{1}{2}}$

(ウ)　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1^2-4\cdot\dfrac{1}{2}=\mathbf{-1}$

**類題 31 − 1**

2 次方程式 $2x^2-8x+5=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$ の値を求めよ．

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-\dfrac{-8}{2}=4$，$\alpha\beta=\dfrac{5}{2}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\cdot\dfrac{5}{2}=16-5=\mathbf{11}$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=4^3-3\cdot\dfrac{5}{2}\cdot4=64-30=\mathbf{34}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題31－2**

(1)　次の条件を満たすような定数 $a$ の値をそれぞれ求めよ.

　(ア)　$2x^4+3x^3-ax+1$ を $x+2$ で割ると余りが1である.

　(イ)　$x^3+ax+a+1$ が $x-3$ で割り切れる.

(2)　整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余りは1, $x+2$ で割ると余りは7となる. このとき, $P(x)$ を $x^2+x-2$ で割った余りを求めよ.

(1)　(ア)　$P(x)=2x^4+3x^3-ax+1$　とおくと, $Q(x)$ を整式として

$P(x)=2x^4+3x^3-ax+1=(x+2)Q(x)+1$　とおける.

$P(-2)=1$　より　$2\cdot(-2)^4+3\cdot(-2)^3-a(-2)+1=1$

$2a+9=1$

よって　$\boldsymbol{a=-4}$

(イ)　$P(x)=x^3+ax+a+1$　とおくと, $Q(x)$ を整式として

$P(x)=x^3+ax+a+1=(x-3)Q(x)$　とおける.

$P(3)=0$　より　$3^3+a\cdot3+a+1=0$　　$4a+28=0$

よって　$\boldsymbol{a=-7}$

(2)　$P(x)$ を $x^2+x-2$　つまり　$(x-1)(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とすると,

$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$　とおける.

$P(x)$ を $x-1$ で割ると余り1より　$P(1)=1$　　よって　$a+b=1$　……①

$P(x)$ を $x+2$ で割ると余り7より　$P(-2)=7$　　よって　$-2a+b=7$　……②

①, ②より　$a=-2$, $b=3$

ゆえに, 求める余りは　$\boldsymbol{-2x+3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 31 － 2**

(1)　$6x^3+ax^2-3x-9$ が $2x+3$ で割り切れるとき，定数 $a$ の値を求めよ．

(2)　整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると $-1$ 余り，$x+3$ で割ると 9 余る．このとき $P(x)$ を $x^2+x-6$ で割った余りを求めよ．

(1)　$P(x)=6x^3+ax^2-3x-9$　とおくと，$Q(x)$ を整式として

$$P(x)=6x^3+ax^2-3x-9=(2x+3)Q(x)$$

$P\left(-\frac{3}{2}\right)=0$　より　$6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3+a\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-9=0$

よって　$\boldsymbol{a=11}$

(2)　$P(x)$ を $x^2+x-6$　つまり　$(x-2)(x+3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，

$P(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$　とおける．

$P(x)$ を $x-2$ で割ると余り $-1$ より　$P(2)=-1$　　よって　$2a+b=-1$　……①

$P(x)$ を $x+3$ で割ると余り 9 より　$P(-3)=9$　　よって　$-3a+b=9$　……②

①，②より　$a=-2$，$b=3$

ゆえに，求める余りは　$\boldsymbol{-2x+3}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 31 ー 3**

次の方程式を解け.

(1)　$x^3+4x^2+x-6=0$　　(2)　$x^4-2x^3-x^2-4x-6=0$

(1)　$x^3+4x^2+x-6=0$　より

$(x-1)(x^2+5x+6)=0$

$(x-1)(x+2)(x+3)=0$

よって　$\boldsymbol{x=1,\ -2,\ -3}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 1 | −6 | 1 |
| | 1 | 5 | 6 | |
| 1 | 5 | 6 | 0 | |

(2)　$x^4-2x^3-x^2-4x-6=0$　より

$(x+1)(x^3-3x^2+2x-6)=0$

$(x+1)(x-3)(x^2+2)=0$

よって　$\boldsymbol{x=-1,\ 3}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −2 | −1 | −4 | −6 | −1 |
| | −1 | 3 | −2 | 6 | |
| 1 | −3 | 2 | −6 | 0 | 3 |
| | 3 | 0 | 6 | | |
| 1 | 0 | 2 | 0 | | |

（複素数の範囲で解くと，$x=-1,\ 3,\ x^2+2=0$　　つまり　$x=-1,\ 3,\ \pm\sqrt{2}i$）

**類題 31 ー 3**

次の方程式を解け.

(1)　$2x^3-5x^2-x+6=0$　　(2)　$x^4+3x^3-5x^2-3x+4=0$

(1)　$2x^3-5x^2-x+6=0$　より

$(x+1)(2x^2-7x+6)=0$

$(x+1)(2x-3)(x-2)=0$

よって　$\boldsymbol{x=-1,\ \frac{3}{2},\ 2}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | −5 | −1 | 6 | −1 |
| | −2 | 7 | −6 | |
| 2 | −7 | 6 | 0 | |

(2)　$x^4+3x^3-5x^2-3x+4=0$　より

$(x-1)(x^3+4x^2-x-4)=0$

$(x-1)^2(x^2+5x+4)=0$

$(x-1)^2(x+1)(x+4)=0$

よって　$\boldsymbol{x=1,\ -1,\ -4}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | −5 | −3 | 4 | 1 |
| | 1 | 4 | −1 | −4 | |
| 1 | 4 | −1 | −4 | 0 | 1 |
| | 1 | 5 | 4 | | |
| 1 | 5 | 4 | 0 | | |

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 31 ー 4**

(1)　3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-6=0$ が $-1$ と 2 を解にもつとき，定数 $a$，$b$ の値と他の解を求めよ．

(2)　方程式 $x^3=1$ の解のうち，虚数であるものの 1 つを $\omega$ とするとき，$\omega^8+\omega^4$ の値を求めよ．

(1)　$x=-1,\ 2$ が解であるから，それぞれ代入して

$$\begin{cases} -1+a-b-6=0, \\ 8+4a+2b-6=0 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} a-b=7, \\ 2a+b=-1 \end{cases}$$

よって　$\boldsymbol{a=2,\ b=-5}$

このとき与えられた方程式は　$x^3+2x^2-5x-6=0$

これを変形して　$(x+1)(x-2)(x+3)=0$

したがって他の解は　$\boldsymbol{x=-3}$

**(別解)**　他の解を $x=\alpha$ とおくと，与えられた方程式は

$(x+1)(x-2)(x-\alpha)=0$　と変形できる．

この式の左辺を展開して　$x^3-(\alpha+1)x^2+(\alpha-2)x+2\alpha=0$

これを　$x^3+ax^2+bx-6=0$　と比較して

$-\alpha-1=a,\ \alpha-2=b,\ 2\alpha=-6$

よって　$\alpha=-3,\ a=2,\ b=-5$

(2)　$x^3=1$ より

$x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1,\ x^2+x+1=0$

よって $\omega$ は方程式 $x^2+x+1=0$ の解である．

ゆえに　$\omega^2+\omega+1=0$　　また　$\omega^3=1$

したがって　$\omega^8+\omega^4=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega=\omega^2+\omega=\boldsymbol{-1}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題31－4**

(1)　3次方程式 $x^3+ax^2-21x+b=0$ が1と3を解にもつとき，定数 $a$，$b$ の値と他の解を求めよ．

(2)　1の3乗根のうち，虚数であるものの1つを $\omega$ とするとき，$\omega^{11}+\omega^{10}+1$ の値を求めよ．

(1)　$x=1$，3が解であるから，それぞれ代入して

$$\begin{cases} 1+a-21+b=0, \\ 27+9a-63+b=0 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} a+b=20, \\ 9a+b=36 \end{cases}$$

よって　$\boldsymbol{a=2,\ b=18}$

このとき与えられた方程式は　$x^3+2x^2-21x+18=0$

これを変形して　$(x-1)(x-3)(x+6)=0$　　したがって他の解は　$\boldsymbol{x=-6}$

**(別解)**　他の解を $x=\alpha$ とおくと，与えられた方程式は

$(x-1)(x-3)(x-\alpha)=0$　と変形できる．

この式の左辺を展開して　$x^3-(\alpha+4)x^2+(4\alpha+3)x-3\alpha=0$

これを　$x^3+ax^2-21x+b=0$　と比較して

$-\alpha-4=a$，$4\alpha+3=-21$，$-3\alpha=b$　　よって　$\alpha=-6$，$a=2$，$b=18$

(2)　$\omega$ は1の3乗根，すなわち方程式 $x^3=1$ の解より　$\omega^3=1$

また　$x^3=1$ より

$x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$，$x^2+x+1=0$

よって $\omega$ は方程式 $x^2+x+1=0$ の解である．

ゆえに　$\omega^2+\omega+1=0$

したがって　$\omega^{11}+\omega^{10}+1=(\omega^3)^3\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega+1=\omega^2+\omega+1=\mathbf{0}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第32講　微分法(1)

**例題32－1**

関数 $f(x)=3x^2-2$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$x$ が $-1$ から $5$ まで変化するときの平均変化率を求めよ．

(2)　$x$ が $2$ から $2+h$ ($h\neq 0$) まで変化するときの平均変化率を求めよ．

(3)　$x=2$ における微分係数を求めよ．

(1)　$\dfrac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)}=\dfrac{3\cdot 5^2-2-\{3\cdot(-1)^2-2\}}{6}=\dfrac{72}{6}=\mathbf{12}$

(2)　$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2}=\dfrac{\{3(2+h)^2-2\}-(3\cdot 2^2-2)}{h}=\dfrac{3h^2+12h}{h}=\boldsymbol{3h+12}$

(3)　$f'(2)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2}=\lim_{h\to 0}(3h+12)=\mathbf{12}$

**類題32－1**

関数 $f(x)=3x^2-2x+1$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$x=-4$ から $x=2$ まで変化するときの平均変化率を求めよ．

(2)　$x=-1$ における微分係数を求めよ．

(1)　$\dfrac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)}=\dfrac{(12-4+1)-(48+8+1)}{6}=\dfrac{-48}{6}=\mathbf{-8}$

(2)　$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{(-1+h)-(-1)}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{3(-1+h)^2-2(-1+h)+1\}-(3+2+1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2-8h}{h}=\lim_{h\to 0}(3h-8)=\mathbf{-8}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 32 － 2**

次の関数を微分せよ．また $x=1$ における微分係数をそれぞれ求めよ．

(1)　$y=3x^2+6x-5$　　(2)　$y=2x^3-4x^2-6$

(3)　$y=2x^4-3x^2+7x-9$　　(4)　$y=-2$

(1)　$y=3x^2+6x-5$ のとき　$\boldsymbol{y'=6x+6}$

　また，$x=1$ における微分係数は　$6\cdot1+6=\mathbf{12}$

(2)　$f(x)=2x^3-4x^2-6$　とおくと　$\boldsymbol{f'(x)=6x^2-8x}$

　　$f'(1)=6\cdot1^2-8\cdot1=\mathbf{-2}$

(3)　$f(x)=2x^4-3x^2+7x-9$　とおくと　$\boldsymbol{f'(x)=8x^3-6x+7}$

　　$f'(1)=8\cdot1^3-6\cdot1+7=\mathbf{9}$

(4)　$f(x)=-2$　とおくと　$f'(x)=0$

　　$f'(1)=\mathbf{0}$

**類題 32 － 2**

次の関数を微分せよ．また $x=-1$ における微分係数をそれぞれ求めよ．

(1)　$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+2$　(2)　$f(x)=x^3+5x^2+2x-1$　(3)　$f(x)=-3x^4+4x^2+3$

(1)　$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+2$ より　$\boldsymbol{f'(x)=-x+3}$

　　$f'(-1)=-(-1)+3=\mathbf{4}$

(2)　$f(x)=x^3+5x^2+2x-1$ より　$\boldsymbol{f'(x)=3x^2+10x+2}$

　　$f'(-1)=3\cdot(-1)^2+10\cdot(-1)+2=\mathbf{-5}$

(3)　$f(x)=-3x^4+4x^2+3$ より　$\boldsymbol{f'(x)=-12x^3+8x}$

　　$f'(-1)=-12\cdot(-1)+8\cdot(-1)=\mathbf{4}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 32 − 3**

(1)　曲線 $y=x^2-3x+2$ の点 (3，2) における接線の方程式を求めよ．

(2)　曲線 $y=-x^3+x+1$ に接し，傾きが $-2$ である直線の方程式を求めよ．

(1)　$f(x)=x^2-3x+2$ とおくと　$f'(x)=2x-3$

点 (3，2) における接線の傾きは　$f'(3)=3$

よって求める接線の方程式は　$y=3(x-3)+2$

つまり　$\boldsymbol{y=3x-7}$

(2)　$f(x)=-x^3+x+1$ とおくと　$f'(x)=-3x^2+1$

$f'(x)=-2$　より　$-3x^2+1=-2$　　$x^2=1$　　よって　$x=\pm 1$

接点は (1，1) と (−1，1)

$x=1$ の点における接線の方程式は $y=-2(x-1)+1$　つまり　$\boldsymbol{y=-2x+3}$

$x=-1$ の点における接線の方程式は $y=-2(x+1)+1$　つまり　$\boldsymbol{y=-2x-1}$

**類題 32 − 3**

(1)　曲線 $y=-2x^2+5x$ の点 (3，−3) における接線の方程式を求めよ．

(2)　曲線 $y=x^3-2x^2+2$ と直線 $y=-x+k$ が接するとき，$k$ の値を求めよ．

(1)　$f(x)=-2x^2+5x$ とおくと　$f'(x)=-4x+5$

点 (3，−3) における接線の傾きは　$f'(3)=-7$

よって求める接線の方程式は　$y=-7(x-3)-3$　つまり　$\boldsymbol{y=-7x+18}$

(2)　$f(x)=x^3-2x^2+2$ とおくと　$f'(x)=3x^2-4x$

$f'(x)=-1$　より　$3x^2-4x=-1$　　$3x^2-4x+1=0$

$(3x-1)(x-1)=0$　　よって　$x=\dfrac{1}{3}$，1

$x=\dfrac{1}{3}$ の点における $y$ の値は　$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{49}{27}$

よって接線の方程式は　$y=-\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{49}{27}$　つまり　$y=-x+\dfrac{58}{27}$

$x=1$ の点における $y$ の値は　$f(1)=1$

よって接線の方程式は　$y=-(x-1)+1$　つまり　$y=-x+2$

よって　$\boldsymbol{k=\dfrac{58}{27}}$，**2**

**例題 32 － 4**

(1)　関数 $y=x^2-3x+6$ のグラフの接線で，点 $(1,\ 0)$ を通るものの方程式を求めよ.

(2)　点 $(-2,\ 2)$ から曲線 $y=\dfrac{1}{3}x^3-x$ に引いた接線の方程式を求めよ.

(1)　$f(x)=x^2-3x+6$ とおくと，$f'(x)=2x-3$

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$y=(2t-3)(x-t)+t^2-3t+6$

つまり　$y=(2t-3)x-t^2+6$　……①

この接線が $(1,\ 0)$ を通るとき

$0=(2t-3)\cdot 1-t^2+6$

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$　　よって　$t=3,\ -1$

したがって求める接線の方程式は，①より

$t=3$ のとき　$\boldsymbol{y=3x-3}$

$t=-1$ のとき　$\boldsymbol{y=-5x+5}$

(2)　$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x$ とおくと　$f'(x)=x^2-1$

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$y=(t^2-1)(x-t)+\dfrac{1}{3}t^3-t$

つまり　$y=(t^2-1)x-\dfrac{2}{3}t^3$　……①

この接線が $(-2,\ 2)$ を通るとき

$2=(t^2-1)\cdot(-2)-\dfrac{2}{3}t^3$

$t^3+3t^2=0$

$t^2(t+3)=0$　　よって　$t=0,\ -3$

したがって求める接線の方程式は，①より

$t=0$ のとき　$\boldsymbol{y=-x}$

$t=-3$ のとき　$\boldsymbol{y=8x+18}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 32 − 4**

(1)　点 $(1,\ 1)$ から関数 $y=-x^2+x$ のグラフに引いた接線の方程式を求めよ．

(2)　関数 $y=x^3-3x^2+5$ の接線で，点 $(-1,\ 9)$ を通るものの方程式を求めよ．

(1)　$f(x)=-x^2+x$ とおくと，$f'(x)=-2x+1$

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$y=(-2t+1)(x-t)-t^2+t$

つまり　$y=(-2t+1)x+t^2$　……①

この接線が $(1,\ 1)$ を通るとき

$1=(-2t+1)\cdot 1+t^2$

$t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$　　よって　$t=0,\ 2$

したがって求める接線の方程式は，①より

$t=0$ のとき　$\boldsymbol{y=x}$

$t=2$ のとき　$\boldsymbol{y=-3x+4}$

(2)　$f(x)=x^3-3x^2+5$ とおくと，$f'(x)=3x^2-6x$

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$y=(3t^2-6t)(x-t)+t^3-3t^2+5$

つまり　$y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+5$　……①

この接線が $(-1,\ 9)$ を通るとき

$9=(3t^2-6t)\cdot(-1)-2t^3+3t^2+5$

$t^3-3t+2=0$

$(t-1)(t^2+t-2)=0$

$(t-1)^2(t+2)=0$　　よって　$t=1,\ -2$

したがって求める接線の方程式は，①より

$t=1$ のとき　$\boldsymbol{y=-3x+6}$

$t=-2$ のとき　$\boldsymbol{y=24x+33}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 33 講　微分法(2)

**例題 33 － 1**

次の関数の増減を調べ，グラフをかけ．また，極値を求めよ．

(1)　$y=x^3-3x+1$　　(2)　$y=-x^3+6x^2-12x+7$

(3)　$y=x^3+3x^2+4x+2$

それぞれのグラフは下図．

(1)　$y=x^3-3x+1$　より

$y'=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$

$x=-1,\ 1$ のとき　$y'=0$　　よって増減表は右図．

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-1$ | ↗ |

**$x=-1$ で極大値 3**

**$x=1$ で極小値 −1 をとる．**

(2)　$y=-x^3+6x^2-12x+7$　より

$y'=-3x^2+12x-12=-3(x^2-4x+4)=-3(x-2)^2$

$x=2$ のとき　$y'=0$　　よって増減表は右図．

| $x$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ↘ | $-1$ | ↘ |

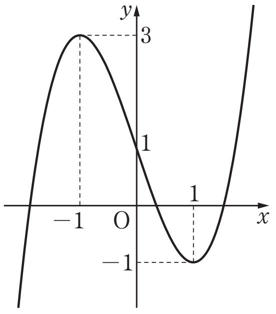
よって常に $y'\leqq 0$ より，単調に減少し，**極値はない．**

(3)　$y=x^3+3x^2+4x+2$　より

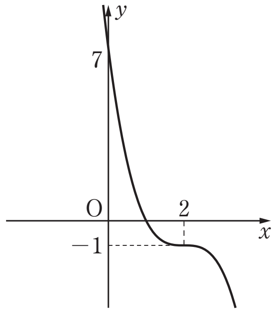
$y'=3x^2+6x+4=3(x+1)^2+1>0$

よって常に $y'>0$ より，単調に増加し，**極値はない．**

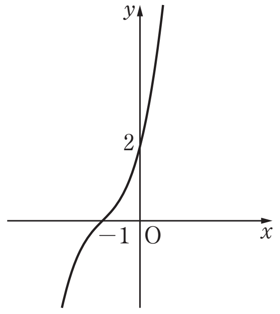
(1)




(2)




(3)




ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 33 ー 1**

次の関数の増減を調べ，グラフをかけ．また，極値を求めよ．

(1)　$y=-2x^3+3x^2-1$　　(2)　$y=x^3+3x^2+3x$

(3)　$y=-x^3-x-\dfrac{1}{3}$

それぞれのグラフは下図．

(1)　$y=-2x^3+3x^2-1$　より

$y'=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$x=0,\ 1$ のとき　$y'=0$　　よって増減表は右図．

**$x=0$ で極小値 $-1$**

**$x=1$ で極大値 $0$ をとる．**

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↘ |

(2)　$y=x^3+3x^2+3x$　より

$y'=3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2$

$x=-1$ のとき　$y'=0$　　よって増減表は右図．

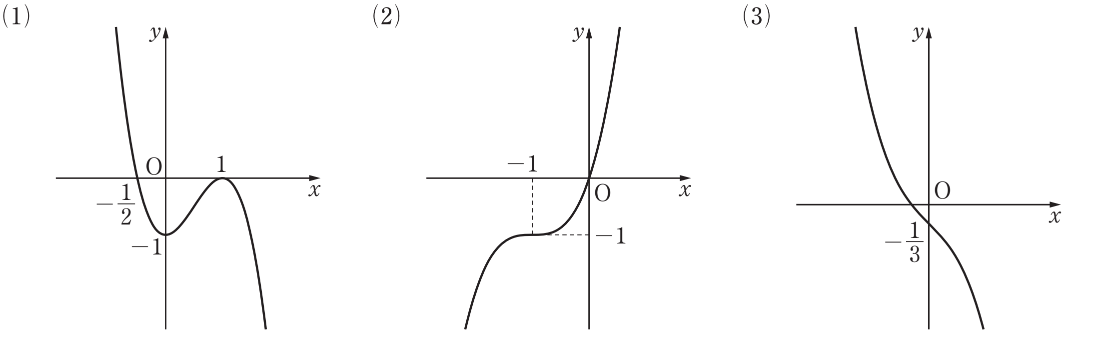
よって常に $y'\geqq 0$ より，単調に増加し，**極値はない．**

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $-1$ | ↗ |

(3)　$y=-x^3-x-\dfrac{1}{3}$　より

$y'=-3x^2-1<0$

よって常に $y'<0$ より，単調に減少し，**極値はない．**




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 33 ー 2**

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $x=-1$ で極大値をとり，$x=3$ で極小値 $-28$ をとるように，定数 $a$，$b$，$c$ の値を定めよ．また，極大値を求めよ．

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$　より　$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=-1$ で極大値をとるとき　$f'(-1)=0$

　よって　$3-2a+b=0$　……①

$x=3$ で極小値 $-28$ をとるとき　$f'(3)=0$，$f(3)=-28$

　よって　$27+6a+b=0$　……②　　$27+9a+3b+c=-28$　……③

①，②より　$a=-3$，$b=-9$　　これと③より　$c=-1$

このとき　$f(x)=x^3-3x^2-9x-1$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

増減表は右図.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-28$ | ↗ |

よって確かに $f(x)$ は $x=-1$ で極大値をとり，$x=3$ で極小値 $-28$ をとり，条件を満たす.

したがって　$\boldsymbol{a=-3}$**，**$\boldsymbol{b=-9}$**，**$\boldsymbol{c=-1}$　　**極大値は 4**

**類題 33 ー 2**

関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極大値 6 をとり，$x=2$ で極小値 5 をとるように，定数 $a$，$b$，$c$，$d$ の値を定めよ.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$　より　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=1$ で極大値 6 をとるとき　$f'(1)=0$，$f(1)=6$

　よって　$3a+2b+c=0$　……①，$a+b+c+d=6$　……②

$x=2$ で極小値 5 をとるとき　$f'(2)=0$，$f(2)=5$

　よって　$12a+4b+c=0$　……③，$8a+4b+2c+d=5$　……④

④－②より　$7a+3b+c=-1$　……⑤

③－①より　$9a+2b=0$　　⑤－①より　$4a+b=-1$　　これらより　$a=2$，$b=-9$

このとき①より　$c=12$　　②より　$d=1$

よって　$f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

増減表は右図.

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $6$ | ↘ | $5$ | ↗ |

よって確かに $x=1$ で極大値 6，$x=2$ で極小値 5 をとり，条件を満たす.

したがって　$\boldsymbol{a=2}$**，**$\boldsymbol{b=-9}$**，**$\boldsymbol{c=12}$**，**$\boldsymbol{d=1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 33 ー 3**

(1)　関数 $f(x)=x^3-6x^2+6ax$ が極値をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

(2)　関数 $f(x)=x^3+ax^2+3(a-2)x+7$ が極値をもたないとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

(1)　$f(x)=x^3-6x^2+6ax$　より　$f'(x)=3x^2-12x+6a$

$f(x)$ が極値をもつ条件は，2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである．

$3x^2-12x+6a=0$　つまり　$x^2-4x+2a=0$ の判別式を $D$ とすると

$\frac{D}{4}=4-2a>0$　よって　$\boldsymbol{a<2}$

(2)　$f(x)=x^3+ax^2+3(a-2)x+7$ より　$f'(x)=3x^2+2ax+3(a-2)$

$f(x)$ が極値をもたない条件は，$f'(x)$ の符号が変わらないことであり，

それは 2 次方程式 $f'(x)=0$ が実数解を 1 つだけもつ，または実数解をもたないことである．

$3x^2+2ax+3(a-2)=0$ の判別式を $D$ とすると

$\frac{D}{4}=a^2-3\cdot3(a-2)\leqq0$　　$a^2-9a+18\leqq0$　　$(a-3)(a-6)\leqq0$

よって　$\boldsymbol{3\leqq a\leqq6}$

**類題 33 ー 3**

(1)　関数 $f(x)=x^3-3ax^2+ax+2$ が極値をもつような定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

(2)　関数 $f(x)=-x^3-ax^2-2x-3$ が単調に減少するような定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

(1)　$f(x)=x^3-3ax^2+ax+2$　より　$f'(x)=3x^2-6ax+a$

$f(x)$ が極値をもつ条件は，2 次方程式 $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである．

$3x^2-6ax+a=0$ の判別式を $D$ とすると

$\frac{D}{4}=9a^2-3a>0$

$a(3a-1)>0$　　よって　$\boldsymbol{a<0,\ \frac{1}{3}<a}$

(2)　$f(x)=-x^3-ax^2-2x-3$　より　$f'(x)=-3x^2-2ax-2$

$f(x)$ が単調に減少するための条件は，常に $f'(x)\leqq0$ が成り立つことであり，

$f'(x)$ の $x^2$ の係数は負より，2 次方程式 $f'(x)=0$ が実数解を 1 つだけもつ，または実数解をもたなければよい．

$-3x^2-2ax-2=0$　つまり　$3x^2+2ax+2=0$ の判別式を $D$ とすると

$\frac{D}{4}=a^2-6\leqq0$　　よって　$\boldsymbol{-\sqrt{6}\leqq a\leqq\sqrt{6}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 33 － 4**

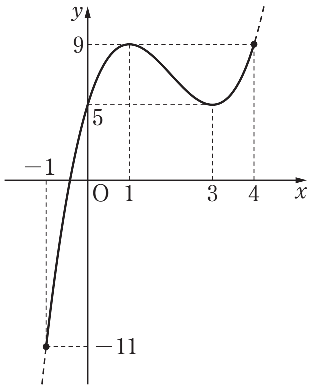
関数 $y=x^3-6x^2+9x+5$ の区間 $-1 \leqq x \leqq 4$ における最大値と最小値を求めよ．

$y=x^3-6x^2+9x+5$　より　$y'=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$x=1,\ 3$ のとき　$y'=0$

よって　$-1 \leqq x \leqq 4$ における増減表は以下．

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-11$ | ↗ | $9$ | ↘ | $5$ | ↗ | $9$ |




グラフは右図．

よって　**$x=1,\ 4$ で最大値 9**　　**$x=-1$ で最小値 $-11$**　をとる．

**類題 33 － 4**

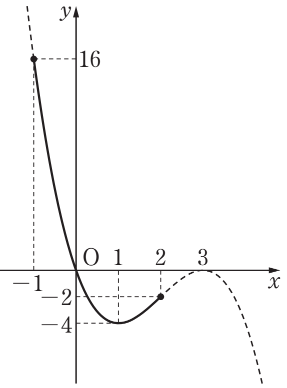
関数 $y=-x^3+6x^2-9x$ の区間 $-1 \leqq x \leqq 2$ における最大値と最小値を求めよ．

$y=-x^3+6x^2-9x$　より　$y'=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$x=1,\ 3$ のとき　$y'=0$

よって　$-1 \leqq x \leqq 2$ における増減表は以下．

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $16$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $-2$ |




グラフは右図．

よって　**$x=-1$ で最大値 16**　**$x=1$ で最小値 $-4$**　をとる．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第34講　微分法(3)・積分法(1)

**例題34－1**

(1)　次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ．

(ア)　$2x^3-6x+1=0$　　(イ)　$x^3+3x^2-4=0$

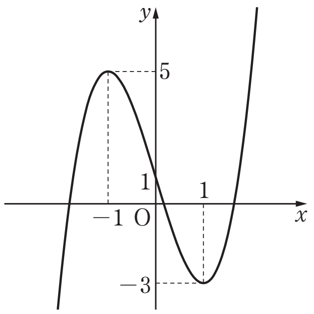
(2)　方程式 $-x^3+3x^2+9x=a$ が異なる3つの実数解をもつような定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

(1)　(ア)　$f(x)=2x^3-6x+1$ とおくと

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f(x)$ の増減表は以下．グラフは右図．

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $5$ | ↘ | $-3$ | ↗ |




よって　$y=f(x)$ と $x$ 軸の共有点は3個より，

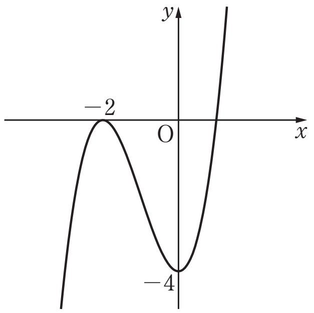
方程式 $2x^3-6x+1=0$ の異なる実数解の個数は **3個**

(イ)　$f(x)=x^3+3x^2-4$ とおくと

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f(x)$ の増減表は以下．グラフは右図．

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-4$ | ↗ |




よって　$y=f(x)$ と $x$ 軸の共有点は2個より，

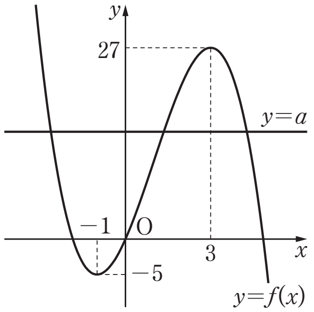
方程式 $x^3+3x^2-4=0$ の異なる実数解の個数は **2個**

(2)　$f(x)=-x^3+3x^2+9x$ とおくと，方程式 $-x^3+3x^2+9x=a$ の異なる実数解の個数は曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ の共有点の個数である．

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x-3)(x+1)$

$f(x)$ の増減表は以下．グラフは右図．

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-5$ | ↗ | $27$ | ↘ |




よって異なる実数解の個数が3個となるのは

$\boldsymbol{-5<a<27}$　のとき．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 34 ー 1**

(1)　次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ．

(ア)　$2x^3+3x^2+2=0$　　　(イ)　$x^3+4x^2+6x+2=0$

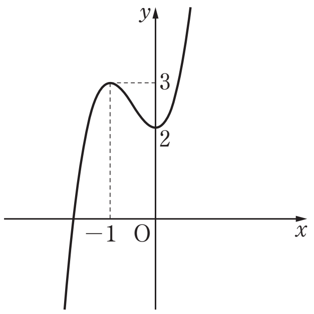
(2)　方程式 $2x^3+9x^2-3=a$ が異なる 3 つの実数解をもつような定数 $a$ の値の範囲を求めよ．

(1)　(ア)　$f(x)=2x^3+3x^2+2$ とおくと

$$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$$

$f(x)$ の増減表は以下．グラフは右図．

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $3$ | ↘ | $2$ | ↗ |



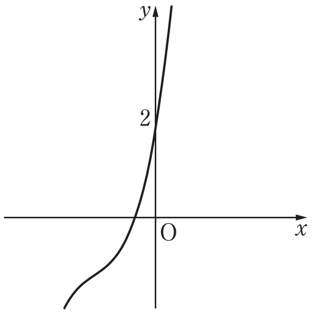

よって　$y=f(x)$ と $x$ 軸の共有点は 1 個より，

方程式 $2x^3+3x^2+2=0$ の異なる実数解の個数は **1 個**

(イ)　$f(x)=x^3+4x^2+6x+2$ とおくと

$$f'(x)=3x^2+8x+6=3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$$

よって常に $f'(x)>0$ より，$f(x)$ は単調増加．グラフは右図．




したがって　$y=f(x)$ と $x$ 軸の共有点は 1 個より，

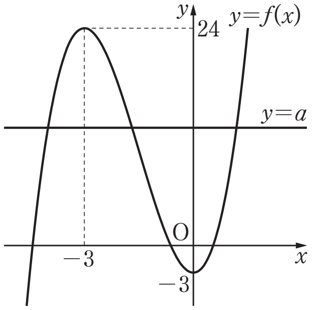
方程式 $x^3+4x^2+6x+2=0$ の異なる実数解の個数は **1 個**

(2)　$f(x)=2x^3+9x^2-3$ とおくと，方程式 $2x^3+9x^2-3=a$ の異なる実数解の個数は曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ の共有点の個数である．

$$f'(x)=6x^2+18x=6x(x+3)$$

$f(x)$ の増減表は以下．グラフは右図．

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $24$ | ↘ | $-3$ | ↗ |




よって異なる実数解の個数が 3 個となるのは

**$-3<a<24$**　のとき．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 34 － 2**

次の不等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$x>0$ のとき　$3x^3+1>x$

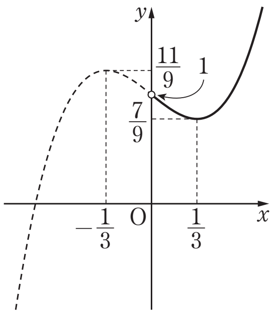
(2)　$x\geqq 0$ のとき　$x^3+4x\geqq 3x^2$

(1)　$f(x)=(3x^3+1)-x=3x^3-x+1$ とおくと

$$f'(x)=9x^2-1=(3x+1)(3x-1)$$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は以下. グラフは右図.

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{1}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $(1)$ | ↘ | $\frac{7}{9}$ | ↗ |




よって　$x>0$ のとき　$f(x)>0$

したがって　$x>0$ のとき　$3x^3+1>x$ が成り立つ.

(2)　$f(x)=(x^3+4x)-3x^2=x^3-3x^2+4x$ とおくと

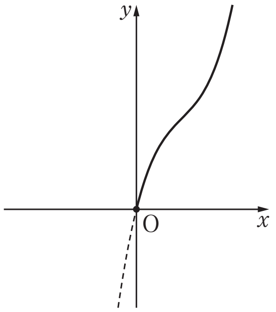
$$f'(x)=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1>0$$

よって常に $f'(x)>0$ より, $f(x)$ は単調増加.

また, $f(0)=0$

よって　$x\geqq 0$ のとき　$f(x)\geqq 0$

したがって　$x\geqq 0$ のとき　$x^3+4x\geqq 3x^2$ が成り立つ.




ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 34 ー 2**

次の不等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+1 \geqq 3x^2$

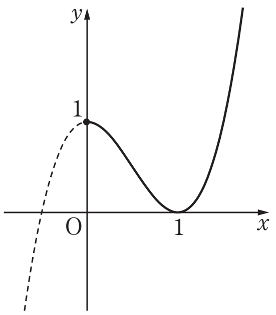
(2)　$x>1$ のとき　$x^3-6x^2+12x-7>0$

(1)　$f(x)=(2x^3+1)-3x^2=2x^3-3x^2+1$ とおくと

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は以下．グラフは右図.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | 1 | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ |




よって　$x \geqq 0$ のとき　$f(x) \geqq 0$

したがって　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+1 \geqq 3x^2$ が成り立つ.

(2)　$f(x)=x^3-6x^2+12x-7$ とおくと

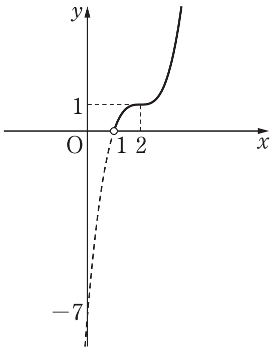
$f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2 \geqq 0$

よって常に $f'(x) \geqq 0$（$f'(x)=0$ となるのは $x=2$ のみ）より，$f(x)$ は単調増加.

また，$f(1)=0$

よって　$x>1$ のとき　$f(x)>0$

したがって　$x>1$ のとき　$x^3-6x^2+12x-7>0$ が成り立つ.




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 34 － 3**

(1)　次の不定積分を求めよ.

(ア) $\displaystyle\int(x^2+x+2)dx$　　(イ) $\displaystyle\int(x+2)^2dx$

(2)　次の定積分を求めよ.

(ア) $\displaystyle\int_{-3}^{1}(2x^2-3x+4)dx$　　(イ) $\displaystyle\int_{2}^{4}(x-1)(x-3)dx$

(1)　$C$ を積分定数とする.

(ア) $\displaystyle\int(x^2+x+2)dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+C}$

(イ) $\displaystyle\int(x+2)^2dx=\int(x^2+4x+4)dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x+C}$

(2) (ア)
$$\int_{-3}^{1}(2x^2-3x+4)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-3}^{1}$$
$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+4\right)-\left(-\frac{54}{3}-\frac{27}{2}-12\right)$$
$$=\frac{56}{3}+\frac{24}{2}+16=\boldsymbol{\frac{140}{3}}$$

(イ)
$$\int_{2}^{4}(x-1)(x-3)dx=\int_{2}^{4}(x^2-4x+3)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_{2}^{4}$$
$$=\left(\frac{64}{3}-32+12\right)-\left(\frac{8}{3}-8+6\right)$$
$$=\frac{56}{3}-24+6=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

**類題 34 － 3**

(1)　不定積分 $\displaystyle\int(3x^2-x+2)dx$ を求めよ.

(2)　次の定積分を求めよ.

(ア) $\displaystyle\int_{1}^{4}(x-1)^2dx$　　(イ) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(4x^3-x^2+2x-1)dx$

(1)　$\displaystyle\int(3x^2-x+2)dx=\boldsymbol{x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+C}$　（$C$：積分定数）

(2) (ア)
$$\int_{1}^{4}(x-1)^2dx=\int_{1}^{4}(x^2-2x+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{1}^{4}$$
$$=\left(\frac{64}{3}-16+4\right)-\left(\frac{1}{3}-1+1\right)=\frac{63}{3}-12=\boldsymbol{9}$$

(イ)
$$\int_{-1}^{1}(4x^3-x^2+2x-1)dx=\left[x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2-x\right]_{-1}^{1}$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}+1-1\right)-\left(1+\frac{1}{3}+1+1\right)=-\frac{2}{3}-2=\boldsymbol{-\frac{8}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 34 － 4**

(1)　等式 $f(x)=x+\int_0^3 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

(2)　次の問いに答えよ.

(ア)　$\dfrac{d}{dx}\int_2^x (2t+1)dt$ を計算せよ.

(イ)　等式 $\int_a^x f(t)dt=x^2-5x+6$ を満たす関数 $f(x)$ および定数 $a$ の値を求めよ.

(1)　$\int_0^3 f(t)dt=a$ とおくと　　$f(x)=x+a$

このとき　$a=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^3 (t+a)dt$

$$=\left[\frac{t^2}{2}+at\right]_0^3=\frac{9}{2}+3a$$

より

$a=\dfrac{9}{2}+3a$　　$a=-\dfrac{9}{4}$　　　よって　$\boldsymbol{f(x)=x-\dfrac{9}{4}}$

(2)　(ア)　$\dfrac{d}{dx}\int_2^x (2t+1)dt=\dfrac{d}{dx}[t^2+t]_2^x=\dfrac{d}{dx}(x^2+x-6)=\boldsymbol{2x+1}$

(イ)　$\int_a^x f(t)dt=x^2-5x+6$　……①　の両辺を $x$ で微分すると

$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=2x-5$　　よって　$\boldsymbol{f(x)=2x-5}$

また，①で $x=a$ のとき　$\int_a^a f(t)dt=a^2-5a+6$

つまり　$a^2-5a+6=0$　　$(a-3)(a-2)=0$　　よって　$\boldsymbol{a=2,\ 3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 34 ー 4**

(1)　等式 $f(x)=3x^2-x\int_0^2 f(t)dt+2$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

(2)　等式 $\int_a^x f(t)dt=2x^2-9x+4$ を満たす関数 $f(x)$ および定数 $a$ の値を求めよ.

(1)　$\int_0^2 f(t)dt=a$ とおくと　$f(x)=3x^2-ax+2$

このとき　$a=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 (3t^2-at+2)dt$

$$=\left[t^3-\frac{a}{2}t^2+2t\right]_0^2=12-2a$$

より

$a=12-2a$　　$a=4$　　　よって　$\boldsymbol{f(x)=3x^2-4x+2}$

(2)　$\int_a^x f(t)dt=2x^2-9x+4$　……①　の両辺を $x$ で微分すると

$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=4x-9$　　よって　$\boldsymbol{f(x)=4x-9}$

また，①で $x=a$ のとき　$\int_a^a f(t)dt=2a^2-9a+4$

つまり　$2a^2-9a+4=0$　　$(2a-1)(a-4)=0$　　よって　$\boldsymbol{a=\frac{1}{2},\ 4}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 35 講　積分法(2)

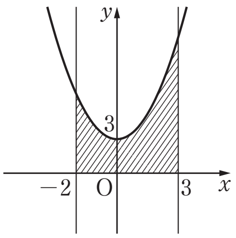
**例題 35 ー 1**

次の曲線，直線と $x$ 軸で囲まれた図形の面積 $S$ を求めよ．

(1)　$y=x^2+3$，$x=-2$，$x=3$

(2)　$y=x^2-4x-5$

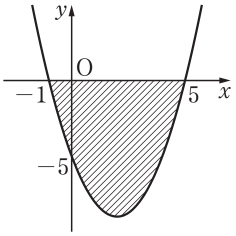
(1)　右図より




$$S=\int_{-2}^{3}(x^2+3)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_{-2}^{3}$$

$$=(9+9)-\left(-\frac{8}{3}-6\right)=\mathbf{\frac{80}{3}}$$

(2)　$y=x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$ より，この曲線と $x$ 軸との交点の $x$ 座標は　$x=-1,\ 5$




よって　$S=-\int_{-1}^{5}(x^2-4x-5)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x\right]_{-1}^{5}$

$$=-\left\{\left(\frac{125}{3}-50-25\right)-\left(-\frac{1}{3}-2+5\right)\right\}=\mathbf{36}$$

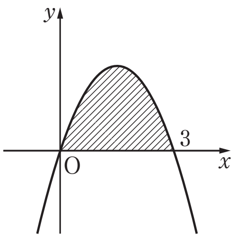
**類題 35 ー 1**

次の曲線，直線と $x$ 軸で囲まれた図形の面積 $S$ を求めよ．

(1)　$y=-x^2+3x$

(2)　$y=-x^2-2$，$x=-1$，$x=2$

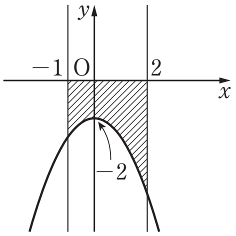
(1)　$y=-x^2+3x=-x(x-3)$ より，この曲線と $x$ 軸との交点の $x$ 座標は　$x=0,\ 3$




よって　$S=\int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}$

$$=\left(-9+\frac{27}{2}\right)-0=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

(2)　右図より




$$S=-\int_{-1}^{2}(-x^2-2)dx=\int_{-1}^{2}(x^2+2)dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}-2\right)=\mathbf{9}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 35 － 2**

次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 $S$ を求めよ.

(1)　$y=x^2$,　$y=x+2$

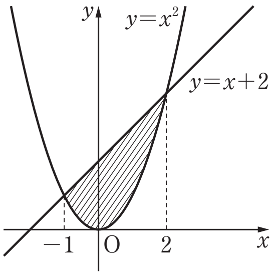
(2)　$y=x^2-4x+2$,　$y=-x^2+2x-2$

(1)　$y=x^2$ と $y=x+2$ の交点の $x$ 座標は

$x^2=x+2$　つまり　$x^2-x-2=0$ の 2 解

これを解いて　$x=-1,\ 2$

よって右図より




$$S=\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$

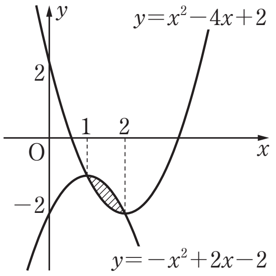
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

(2)　$y=x^2-4x+2$,　$y=-x^2+2x-2$ の交点の $x$ 座標は

$x^2-4x+2=-x^2+2x-2$　つまり　$2x^2-6x+4=0$ の解

これを解いて　$x^2-3x+2=0$　　$x=1,\ 2$

よって右図より




$$S=\int_{1}^{2}\{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx$$

$$=\int_{1}^{2}(-2x^2+6x-4)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_{1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{16}{3}+12-8\right)-\left(-\frac{2}{3}+3-4\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 35 ー 2**

次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 $S$ を求めよ.

(1)　$y=-x^2-x+4$, $y=-3x+1$

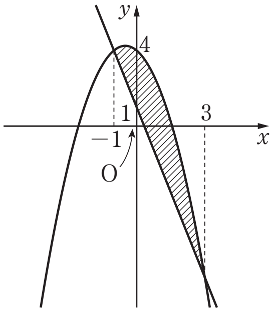
(2)　$y=x^2-2x$, $y=-x^2+x+2$

(1)　$y=-x^2-x+4$ と $y=-3x+1$ の交点の $x$ 座標は

$-x^2-x+4=-3x+1$　つまり　$x^2-2x-3=0$ の 2 解

これを解いて　$x=-1,\ 3$

よって右図より




$$S=\int_{-1}^{3}\{(-x^2-x+4)-(-3x+1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}$$

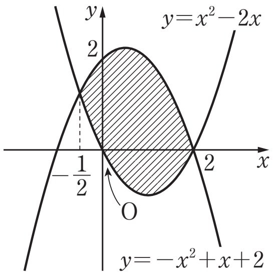
$$=(-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\boldsymbol{\frac{32}{3}}$$

(2)　$y=x^2-2x$ と $y=-x^2+x+2$ の交点の $x$ 座標は

$x^2-2x=-x^2+x+2$　つまり　$2x^2-3x-2=0$ の 2 解

これを解いて　$x=-\frac{1}{2},\ 2$

よって右図より




$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\{(-x^2+x+2)-(x^2-2x)\}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(-2x^2+3x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-\frac{1}{2}}^{2}=\left(-\frac{16}{3}+6+4\right)-\left(\frac{1}{12}+\frac{3}{8}-1\right)=\boldsymbol{\frac{125}{24}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 35 − 3**

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2-4$，$y \leqq x+2$，$y \leqq -2x-1$ の表す領域を図示せよ．

(2)　(1)の領域の面積 $S$ を求めよ．

(1)　$y=x^2-4$　……①，$y=x+2$　……②，$y=-2x-1$　……③　とすると

①と②の交点の $x$ 座標は

方程式 $x^2-4=x+2$　つまり　$x^2-x-6=0$ の 2 解より

$x=-2,\ 3$

①と③の交点の $x$ 座標は

方程式 $-2x-1=x^2-4$　つまり　$x^2+2x-3=0$ の 2 解より

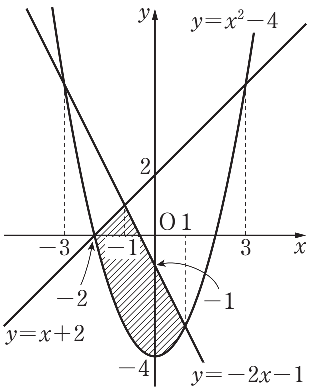
$x=1,\ -3$

②と③の交点の $x$ 座標は，

方程式 $x+2=-2x-1$ の解より　　$x=-1$

よって不等式の表す領域は

右図斜線部分．ただし境界含む．




(2)　$S=\int_{-2}^{-1}\{(x+2)-(x^2-4)\}dx+\int_{-1}^{1}\{(-2x-1)-(x^2-4)\}dx$

$=\int_{-2}^{-1}(-x^2+x+6)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2-2x+3)dx$

$=\int_{-2}^{-1}(-x^2+x+6)dx+2\int_{0}^{1}(-x^2+3)dx$

$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{-1}+2\left[-\frac{x^3}{3}+3x\right]_{0}^{1}$

$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-6\right)-\left(\frac{8}{3}+2-12\right)+2\left(-\frac{1}{3}+3\right)=\mathbf{\frac{15}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 35 ー 3**

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2$，$y \geqq -x+2$，$y \leqq x+6$ の表す領域を図示せよ．

(2)　(1)の領域の面積 $S$ を求めよ．

(1)　$y=x^2$　……①，$y=-x+2$　……②，$y=x+6$　……③　とすると

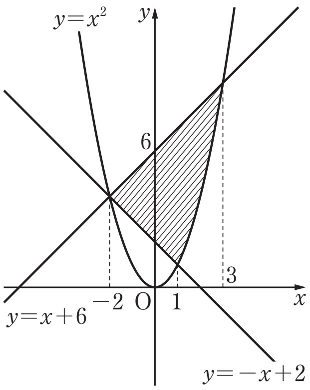
①，②より　$x^2=-x+2$　　$x^2+x-2=0$　　$x=-2,\ 1$

①，③より　$x^2=x+6$　　$x^2-x-6=0$　　$x=-2,\ 3$

②，③より　$-x+2=x+6$　　$x=-2$

よって不等式の表す領域は

右図斜線部分．ただし境界含む．




(2)　$S=\int_{-2}^{1}\{(x+6)-(-x+2)\}dx+\int_{1}^{3}\{(x+6)-x^2\}dx$

$=\int_{-2}^{1}(2x+4)dx+\int_{1}^{3}(-x^2+x+6)dx$

$=\left[x^2+4x\right]_{-2}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{1}^{3}$

$=(1+4)-(4-8)+\left(-9+\frac{9}{2}+18\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+6\right)$

$=9+\frac{22}{3}=\boldsymbol{\frac{49}{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題35－4**

放物線 $C$：$y=x^2-x+3$ 上の2点 $(-1,\ 5)$, $(3,\ 9)$ における接線をそれぞれ $l_1$, $l_2$ とする.

(1)　$l_1$, $l_2$ の方程式を求めよ.

(2)　$C$, $l_1$, $l_2$ によって囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ.

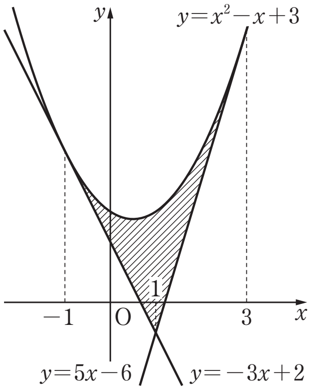
(1)　$y=x^2-x+3$　より　$y'=2x-1$

$l_1$ の方程式は　$y=-3(x+1)+5$　よって　$\boldsymbol{y=-3x+2}$

$l_2$ の方程式は　$y=5(x-3)+9$　よって　$\boldsymbol{y=5x-6}$

(2)　$l_1$ と $l_2$ の交点の $x$ 座標は　$-3x+2=5x-6$ より　$x=1$

よって右図より




$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^2-x+3)-(-3x+2)\}dx+\int_{1}^{3}\{(x^2-x+3)-(5x-6)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(x^2+1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_1^3$$

$$=2\left(\frac{1}{3}+1\right)+(9-27+27)-\left(\frac{1}{3}-3+9\right)=\boldsymbol{\frac{16}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 35 － 4**

点 $(1,\ 1)$ から放物線 $C：y=-x^2+x$ に 2 本の接線を引く.

(1)　2 本の接線の方程式を求めよ.

(2)　C と(1)の 2 本の接線によって囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ.

(1)　$y=-x^2+x$　より　$y'=-2x+1$

$C$ 上の点 $(t,\ -t^2+t)$ における接線の方程式は

$y=(-2t+1)(x-t)-t^2+t$　より　$y=(-2t+1)x+t^2$

これが $(1,\ 1)$ を通るとき　$1=(-2t+1)\cdot 1+t^2$　$t^2-2t=0$　　$t=0,\ 2$

よって求める 2 本の接線の方程式は

$\boldsymbol{y=x,\ y=-3x+4}$

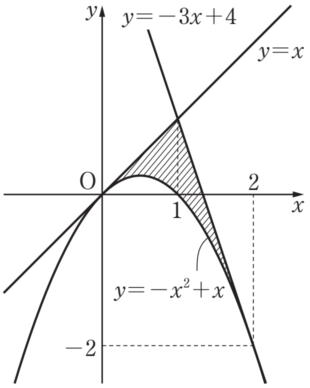
(2)　$y=-x^2+x$ と $y=x$ の接点の $x$ 座標は 0

$y=-x^2+x$ と $y=-3x+9$ の接点の $x$ 座標は 2

$y=x$ と $y=-3x+4$ の交点の $x$ 座標は

$x=-3x+4$　より　$x=1$

したがって右図より




$$S=\int_0^1\{x-(-x^2+x)\}dx+\int_1^2\{(-3x+4)-(-x^2+x)\}dx$$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}+\left(\frac{8}{3}-8+8\right)-\left(\frac{1}{3}-2+4\right)=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 36 講　数列(1)

**例題 36 − 1**

(1)　次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．また，第 10 項を求めよ．

(ア)　3，7，11，……　　(イ)　50，47，44，……

(2)　第 5 項が 4，第 10 項が 14 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ．また，24 はこの数列の第何項か．

(1)　(ア)　初項 3，公差 4 の等差数列より　$\boldsymbol{a_n}=3+(n-1)\cdot 4=\boldsymbol{4n-1}$

$\boldsymbol{a_{10}}=4\cdot 10-1=\boldsymbol{39}$

(イ)　初項 50，公差 −3 の等差数列より　$\boldsymbol{a_n}=50+(n-1)\cdot(-3)=\boldsymbol{-3n+53}$

$\boldsymbol{a_{10}}=-3\cdot 10+53=\boldsymbol{23}$

(2)　初項を $a$，公差を $d$ とすると

$a_5=4$　より　$a+4d=4$　……①

$a_{10}=14$　より　$a+9d=14$　……②

①，②より　$a=-4$，$d=2$　　よって　**初項 −4　公差 2**

$a_n=-4+(n-1)\cdot 2=2n-6$　　$2n-6=24$ より　$n=15$

よって　24 は**第 15 項**

**類題 36 − 1**

(1)　次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．また，第 20 項を求めよ．

(ア)　1，6，11，……　　(イ)　100，94，88，……

(2)　第 3 項が 12，第 11 項が −4 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ．また，0 はこの数列の第何項か．

(1)　(ア)　初項 1，公差 5 の等差数列より　$\boldsymbol{a_n}=1+(n-1)\cdot 5=\boldsymbol{5n-4}$

$\boldsymbol{a_{20}}=5\cdot 20-4=\boldsymbol{96}$

(イ)　初項 100，公差 −6 の等差数列より　$\boldsymbol{a_n}=100+(n-1)\cdot(-6)=\boldsymbol{-6n+106}$

$\boldsymbol{a_{20}}=-6\cdot 20+106=\boldsymbol{-14}$

(2)　初項を $a$，公差を $d$ とすると

$a_3=12$　より　$a+2d=12$　……①

$a_{11}=-4$　より　$a+10d=-4$　……②

①，②より　$a=16$，$d=-2$　　よって　**初項 16　公差 −2**

$a_n=16+(n-1)\cdot(-2)=-2n+18$　　$-2n+18=0$　より　$n=9$

よって　0 は**第 9 項**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 36 ー 2**

(1)　初項 3，末項 21，項数 10 の等差数列の和を求めよ．

(2)　初項 60，公差 $-6$ の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ．また，$S_{10}$ を求めよ．

(3)　初項 5，公差 9 の等差数列 $\{b_n\}$ の第 11 項から第 20 項までの和を求めよ．

(1)　$\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot(3+21)=\mathbf{120}$

(2)　$a_n=60+(n-1)\cdot(-6)=-6n+66$　より

$$\boldsymbol{S_n=}\frac{1}{2}\cdot n\cdot\{60+(-6n+66)\}=\frac{1}{2}n(126-6n)=\boldsymbol{n(63-3n)}$$

$$\boldsymbol{S_{10}=}10\cdot(63-3\cdot10)=\mathbf{330}$$

(3)　$b_n=5+(n-1)\cdot9=9n-4$

数列 $\{b_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{5+(9n-4)\}=\frac{1}{2}n(9n+1)$$

求める和は　$S_{20}-S_{10}=\dfrac{1}{2}\cdot20\cdot(180+1)-\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot(90+1)=\mathbf{1355}$

**(別解)**　求める和は　初項 $b_{11}=95$，末項 $b_{20}=176$，項数 $20-11+1=10$ の等差数列の和より

$$\frac{1}{2}\cdot10\cdot(95+176)=1355$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 36 − 2**

(1)　初項 3，公差 −7 の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ．また，$S_{20}$ を求めよ．

(2)　初項 2，公差 4 の等差数列 $\{c_n\}$ の第 20 項から第 40 項までの和を求めよ．

(1)　$a_n=3+(n-1)\cdot(-7)=-7n+10$　より

$$\boldsymbol{S_n}=\frac{1}{2}n(a_1+a_n)=\frac{1}{2}n\{3+(-7n+10)\}=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(13-7n)}$$

$$\boldsymbol{S_{20}}=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot(13-7\cdot 20)=\boldsymbol{-1270}$$

(2)　$c_n=2+(n-1)\cdot 4=4n-2$

数列 $\{c_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2+(4n-2)\}=\frac{1}{2}n\cdot 4n=2n^2$$

求める和は　$S_{40}-S_{19}=2\cdot 40^2-2\cdot 19^2=\boldsymbol{2478}$

**(別解)**　求める和は

$$\frac{1}{2}\cdot 21\cdot(c_{20}+c_{40})=\frac{1}{2}\cdot 21\cdot(78+158)=\frac{1}{2}\cdot 21\cdot 236=2478$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 36 − 3**

(1)　次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．また，第5項を求めよ．

(ア)　2，6，18，……　　(イ)　100，−50，25，……

(2)　第3項が28，第6項が224である等比数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ．ただし公比は実数とする．

(1)　(ア)　初項2，公比3の等比数列より　$\boldsymbol{a_n=2\cdot 3^{n-1}}$

$a_5=2\cdot 3^4=\boldsymbol{162}$

(イ)　初項100，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列より　$\boldsymbol{a_n=100\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$

$a_5=100\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4=\boldsymbol{\dfrac{25}{4}}$

(2)　初項を $a$，公比を $r$ とする．

$a_3=28$ より　$ar^2=28$　……①

$a_6=224$ より　$ar^5=224$　……②

②に①を代入して　$28r^3=224$　　$r^3=8$

$r$ は実数より　$r=2$　　①より　$a=7$　　よって　**初項7　公比2**

**類題 36 − 3**

(1)　次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．また，第6項を求めよ．

(ア)　−27，−9，−3，……　　(イ)　2，−3，$\dfrac{9}{2}$，……

(2)　第2項が −6，第5項が162である等比数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ．ただし公比は実数とする．

(1)　(ア)　初項 −27，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列より　$\boldsymbol{a_n=-27\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}}$

$a_6=-27\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^5=\boldsymbol{-\dfrac{1}{9}}$

(イ)　初項2，公比 $-\dfrac{3}{2}$ の等比数列より　$\boldsymbol{a_n=2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}}$

$a_6=2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^5=\boldsymbol{-\dfrac{243}{16}}$

(2)　初項を $a$，公比を $r$ とする．

$a_2=-6$ より　$ar=-6$　……①

$a_5=162$ より　$ar^4=162$　……②

②に①を代入して　$-6r^3=162$　　$r^3=-27$

$r$ は実数より　$r=-3$　　①より　$a=2$　　よって　**初項2　公比 −3**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 36 － 4**

(1)　次の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ．

(ア)　初項 3，公比 2　　　(イ)　初項 27，公比 $\dfrac{1}{3}$

(2)　初項 16，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の第 6 項から第 10 項までの和を求めよ．

(1)　(ア)　$\dfrac{3(2^n-1)}{2-1}=\mathbf{3(2^n-1)}$

(イ)　$\dfrac{27\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}\cdot 27\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}=\mathbf{\dfrac{81}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とすると

$$S_n=\frac{16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot 16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=32\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

求める和は

$$S_{10}-S_5=32\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}-32\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}=32\left(\frac{1023}{1024}-\frac{31}{32}\right)=32\cdot\frac{31}{1024}=\mathbf{\frac{31}{32}}$$

**(別解)**　$a_n=16\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ より　$a_6=16\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{1}{2}$

よって求める和は　初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$，項数 $10-6+1=5$ の等比数列の和より

$$\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{31}{32}=\frac{31}{32}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 36 ー 4**

(1)　次の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ.

(ア)　初項 1，公比 3　　　(イ)　初項 81，公比 $\dfrac{1}{4}$

(2)　初項 2，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の第 3 項から第 6 項までの和を求めよ.

(1)　(ア)　$\dfrac{1\cdot\{3^n-1\}}{3-1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(3^n-1)}$

(イ)　$\dfrac{81\cdot\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}\cdot81\cdot\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}=\boldsymbol{108\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}}$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とすると

$$S_n=\frac{2\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}\cdot2\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

求める和は

$$S_6-S_2=\frac{3}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^6\right\}-\frac{3}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\frac{3}{2}\left(\frac{728}{729}-\frac{8}{9}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{80}{729}=\boldsymbol{\frac{40}{243}}$$

**(別解)**　$a_n=2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ より　$a_3=2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$

よって求める和は　初項 $\dfrac{2}{9}$，公比 $-\dfrac{1}{3}$，項数 $6-3+1=4$ の等比数列の和より

$$\frac{\dfrac{2}{9}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^4\right\}}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{80}{81}=\frac{40}{243}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第37講　数列(2)

**例題 37 − 1**

(1)　次の和を項を書き並べて表せ.

(ア)　$\sum_{k=1}^{5}(2k-1)$　　(イ)　$\sum_{k=1}^{6}2^{k}$

(2)　次の数列の和を記号 $\Sigma$ を用いて表せ.

(ア)　$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots\cdots,\ n^2$　　(イ)　$1\cdot2,\ 2\cdot3,\ 3\cdot4,\ \cdots\cdots,\ (n-1)\cdot n$

(1)　(ア)　$\sum_{k=1}^{5}(2k-1)=\mathbf{1+3+5+7+9}$

(イ)　$\sum_{k=1}^{6}2^{k}=\mathbf{2+4+8+16+32+64}$

(2)　(ア)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{k^2}$

(イ)　$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)\cdot n=\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{k(k+1)}$

**類題 37 − 1**

(1)　次の和を項を書き並べて表せ.

(ア)　$\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$　　(イ)　$\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}$

(2)　次の数列の和を記号 $\Sigma$ を用いて表せ.

(ア)　$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ \cdots\cdots,\ n^3$　　(イ)　$1\cdot1,\ 3\cdot2,\ 5\cdot4,\ \cdots\cdots,\ (2n+1)\cdot2^{n}$

(1)　(ア)　$\sum_{k=1}^{4}(3k+1)=\mathbf{4+7+10+13}$

(イ)　$\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}=\mathbf{1+3+9+27+81}$

(2)　(ア)　$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{k^3}$

(イ)　$1\cdot1+3\cdot2+5\cdot4+\cdots\cdots+(2n+1)\cdot2^{n}=\sum_{k=1}^{n+1}\boldsymbol{(2k-1)\cdot2^{k-1}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 37 － 2**

次の和を求めよ.

(1) $\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$　(2) $\sum_{k=1}^{n}2^k$　(3) $\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k-4)$

(1) $\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n=n^2+4n=\boldsymbol{n(n+4)}$

**(別解)** $\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=5+7+9+\cdots\cdots+(2n+3)=\frac{1}{2}n\{5+(2n+3)\}$

$=\frac{1}{2}n(2n+8)=n(n+4)$

(2) $\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=\boldsymbol{2^{n+1}-2}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k-4)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}4$

$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)-4n$

$=\frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1)+(n+1)-8\}$

$=\frac{1}{2}n(2n^2+4n-6)=n(n^2+2n-3)=\boldsymbol{n(n+3)(n-1)}$

**類題 37 － 2**

次の和を求めよ.

(1) $\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$　(2) $\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^k$　(3) $\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

(1) $\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=2n^2+n=\boldsymbol{n(2n+1)}$

**(別解)** $\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=3+7+11+\cdots\cdots+(4n-1)=\frac{1}{2}n\{3+(4n-1)\}$

$=\frac{1}{2}n(4n+2)=n(2n+1)$

(2) $\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^k=\frac{6(3^n-1)}{3-1}=3(3^n-1)=\boldsymbol{3^{n+1}-3}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-6k+5)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+5n$

$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-18(n+1)+30\}$

$=\frac{1}{6}n(2n^2-15n+13)=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(2n-13)(n-1)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 37 － 3**

次の数列の和を求めよ.

(1)　1, 6, 11, ……, $5n-4$　(2)　1, 2, 4, 8, ……, $2^n$

(3)　$1^2$, $3^2$, $5^2$, ……, $(2n-1)^2$

(1)　$1+6+11+\cdots\cdots+(5n-4)=\sum_{k=1}^{n}(5k-4)$

$$=5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-4n=\frac{1}{2}n\{5(n+1)-8\}=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(5n-3)}$$

(2)　$1+2+4+8+\cdots\cdots+2^n=\sum_{k=1}^{n+1}2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^{n+1}-1)}{2-1}=\boldsymbol{2^{n+1}-1}$

(3)　$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$

$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}$$

$$=\frac{1}{3}n(4n^2-1)=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)}$$

**類題 37 － 3**

次の数列の和を求めよ.

(1)　1, 4, 7, ……, $3n-5$　(2)　2, 8, 32, ……, $2\cdot4^{n-1}$

(3)　$1\cdot1$, $2\cdot4$, $3\cdot7$, ……, $n(3n-2)$

(1)　$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-5)=\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)$

$$=3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(3n-4)(n-1)}$$

(2)　$2+8+32+\cdots\cdots+2\cdot4^{n-1}=\frac{2(4^n-1)}{4-1}=\boldsymbol{\frac{2}{3}(4^n-1)}$

(3)　$1\cdot1+2\cdot4+3\cdot7+\cdots\cdots+n(3n-2)=\sum_{k=1}^{n}k(3k-2)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-2k)$

$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)-2\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)(2n-1)}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 37 ー 4**

次の数列の一般項 $a_n$ を求めよ.

(1)　1, 4, 8, 13, 19, ……　　(2)　1, 2, 5, 14, 41, ……

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする

(1)　$\{b_n\}$ : 3, 4, 5, 6, …… より, 数列 $\{b_n\}$ は初項 3, 公差 1 の等差数列

よって　$b_n=3+(n-1)\cdot 1=n+2$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)=1+\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=\frac{1}{2}(n^2+3n-2) \quad \cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$\frac{1}{2}(1^2+3\cdot 1-2)=1=a_1$　より, ①は $n=1$ のときも成り立つ.

したがって　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}(n^2+3n-2)}$

(2)　$\{b_n\}$ : 1, 3, 9, 27, …… より, 数列 $\{b_n\}$ は初項 1, 公比 3 の等比数列

よって　$b_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\frac{1\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1) \quad \cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$\frac{1}{2}(3^0+1)=1=a_1$　より, ①は $n=1$ のときも成り立つ.

したがって　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 37 － 4**

次の数列の一般項 $a_n$ を求めよ．

(1)　2，6，12，20，30，……　　(2)　5，7，11，19，35，……

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする

(1)　$\{b_n\}$：4，6，8，10，…… より，数列 $\{b_n\}$ は初項 4，公差 2 の等差数列

よって　$b_n=4+(n-1)\cdot 2=2n+2$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)=2+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=n^2+n \quad \cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$1^2+1=2=a_1$　より，①は $n=1$ のときも成り立つ．

したがって　$\boldsymbol{a_n=n^2+n=n(n+1)}$

(2)　$\{b_n\}$：2，4，8，16，…… より，数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=5+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=5+\frac{2\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+3 \quad \cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$2^1+3=5=a_1$　より，①は $n=1$ のときも成り立つ．

したがって　$\boldsymbol{a_n=2^n+3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 38 講　数列(3)

**例題 38 − 1**

初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$S_n=n^2-3n$　　(2)　$S_n=3^n+1$

(1)　$a_1=S_1=1^2-3\cdot1=-2$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-3n)-\{(n-1)^2-3(n-1)\}$$
$$=n^2-3n-(n^2-2n+1-3n+3)=2n-4\quad\cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$2\cdot1-4=-2=a_1$　より，①は $n=1$ のときも成り立つ．

したがって　$\boldsymbol{a_n=2n-4}$

(2)　$a_1=S_1=3^1+1=4$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n+1-(3^{n-1}+1)=3\cdot3^{n-1}-1\cdot3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}\quad\cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$2\cdot3^0=2$　　よって　①は $n=1$ のときには成り立たない．

よって　$\boldsymbol{a_1=4}$**，**$\boldsymbol{n\geqq2}$ **のとき**　$\boldsymbol{a_n=2\cdot3^{n-1}}$

**類題 38 − 1**

初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$S_n=3n^2-2n+1$　　(2)　$S_n=2^{n+2}-4$

(1)　$a_1=S_1=3\cdot1^2-2\cdot1+1=2$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2-2n+1)-\{3(n-1)^2-2(n-1)+1\}$$
$$=3n^2-2n+1-(3n^2-6n+3-2n+2+1)=6n-5\quad\cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$6\cdot1-5=1$　　よって　①は $n=1$ のときには成り立たない．

よって　$\boldsymbol{a_1=2}$**，**$\boldsymbol{n\geqq2}$ **のとき**　$\boldsymbol{a_n=6n-5}$

(2)　$a_1=S_1=2^3-4=4$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+2}-4)-(2^{n+1}-4)=2\cdot2^{n+1}-1\cdot2^{n+1}=2^{n+1}\quad\cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$2^2=4$　より，①は $n=1$ のときも成り立つ．

よって　$\boldsymbol{a_n=2^{n+1}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 38 － 2**

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n-2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，$a_2$，$a_3$，$a_4$，$a_5$ を求めよ．

(2)　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ．

(ア)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+4$　　(イ)　$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n$

(1)　$a_2=4a_1-2=4\cdot1-2=\mathbf{2}$　　$a_3=4a_2-2=4\cdot2-2=\mathbf{6}$

$a_4=4a_3-2=4\cdot6-2=\mathbf{22}$　　$a_5=4a_4-2=4\cdot22-2=\mathbf{86}$

(2)　(ア)　$a_{n+1}=a_n+4$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=2$，公差 4 の等差数列

よって　$a_n=2+(n-1)\cdot4=\boldsymbol{4n-2}$

(イ)　$a_{n+1}=3a_n$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=5$，公比 3 の等比数列

よって　$a_n=\boldsymbol{5\cdot3^{n-1}}$

**類題 38 － 2**

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，$a_2$，$a_3$，$a_4$，$a_5$ を求めよ．

(2)　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ．

(ア)　$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n-3$　　(イ)　$a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$

(1)　$a_2=2a_1+1=2\cdot2+1=\mathbf{5}$　　$a_3=2a_2+2=2\cdot5+2=\mathbf{12}$

$a_4=2a_3+3=2\cdot12+3=\mathbf{27}$　　$a_5=2a_4+4=2\cdot27+4=\mathbf{58}$

(2)　(ア)　$a_{n+1}=a_n-3$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=4$，公差 $-3$ の等差数列

よって　$a_n=4+(n-1)\cdot(-3)=\boldsymbol{-3n+7}$

(イ)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列

よって　$a_n=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 38 － 3**

次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ.

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+n$

(2)　$a_1=6,\ a_{n+1}=4a_n-9$

(1)　$a_{n+1}-a_n=n$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n=n$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}k=1+\frac{1}{2}(n-1)n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1$　……①

①で $n=1$ のとき　$\frac{1}{2}\cdot 1^2-\frac{1}{2}\cdot 1+1=1$ より，①は $n=1$ のときも成り立つ.

よって　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1}$

(2)　$a_{n+1}=4a_n-9$　より　$a_{n+1}-3=4(a_n-3)$，$a_1-3=6-3=3$

よって数列 $\{a_n-3\}$ は初項 3，公比 4 の等比数列であるから

$a_n-3=3\cdot 4^{n-1}$　　したがって　$\boldsymbol{a_n=3\cdot 4^{n-1}+3}$

**類題 38 － 3**

次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ.

(1)　$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+4^n$

(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+4$

(1)　$a_{n+1}-a_n=4^n$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n=4^n$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=3+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}=\frac{4^n+5}{3}$　……①

①で $n=1$ のとき　$\frac{4+5}{3}=3$ より，①は $n=1$ のときも成り立つ.

よって　$\boldsymbol{a_n=\frac{4^n+5}{3}}$

(2)　$a_{n+1}=3a_n+4$　より　$a_{n+1}+2=3(a_n+2)$，$a_1+2=1+2=3$

よって数列 $\{a_n+2\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列であるから

$a_n+2=3\cdot 3^{n-1}=3^n$　　したがって　$\boldsymbol{a_n=3^n-2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 38 － 4**

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が $S_n=2a_n-n$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$a_{n+1}$ を $a_n$ を用いて表せ．　　(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$S_n=2a_n-n$　……①　より　$S_{n+1}=2a_{n+1}-(n+1)$　……②

②－①より　$S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}-2a_n-1$

つまり　$a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n-1$　　よって　$\boldsymbol{a_{n+1}=2a_n+1}$

(2)　①で $n=1$ のとき　$S_1=2a_1-1$　つまり　$a_1=2a_1-1$　　よって　$a_1=1$

$a_{n+1}=2a_n+1$　より　$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，$a_1+1=2$

よって数列 $\{a_n+1\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列より

$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$　　したがって　$\boldsymbol{a_n=2^n-1}$

**類題 38 － 4**

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が $S_n=-2a_n+n$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$a_{n+1}$ を $a_n$ を用いて表せ．　　(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$S_n=-2a_n+n$　……①　より　$S_{n+1}=-2a_{n+1}+n+1$　……②

②－①より　$S_{n+1}-S_n=-2a_{n+1}+2a_n+1$

つまり　$a_{n+1}=-2a_{n+1}+2a_n+1$

$3a_{n+1}=2a_n+1$　　よって　$\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}}$

(2)　①で $n=1$ のとき　$S_1=-2a_1+1$　つまり　$a_1=-2a_1+1$　　よって　$a_1=\frac{1}{3}$

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$　より　$a_{n+1}-1=\frac{2}{3}(a_n-1)$，$a_1-1=-\frac{2}{3}$

よって数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $-\frac{2}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列より

$a_n-1=-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$　　したがって　$\boldsymbol{a_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 39 講　数列(4)

**例題 39 － 1**

すべての自然数 $n$ に対して，次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \quad \cdots\cdots①$$

［1］　$n=1$ のとき　　(左辺)$=1^3=1$　　(右辺)$=\left\{\frac{1\cdot 2}{2}\right\}^2=1$　より　①は成り立つ．

［2］　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$$

このとき

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3$$

$$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$$

よって，$k=n+1$ のときも①は成り立つ．

［1］，［2］より，すべての自然数 $n$ に対して①は成り立つ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 39 ー 1**

$n$ が自然数のとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ．

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$　……①

［1］　$n=1$ のとき　　(左辺)$=1\cdot 2=2$　　(右辺)$=\dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=2$　より　①は成り立つ．

［2］　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

このとき

$$\begin{aligned}&1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{1}{3}(k+1)\{(k+1)+1\}\{(k+1)+2\}\end{aligned}$$

よって，$k=n+1$ のときも①は成り立つ．

［1］，［2］より，すべての自然数 $n$ に対して①は成り立つ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 39 ― 2**

$n$ を 2 以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$　……①

［1］　$n=2$ のとき　　(左辺)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$　　(右辺)$=\frac{2\cdot 2}{2+1}=\frac{4}{3}$　より　①は成り立つ．

［2］　$k\geqq 2$ として，$n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$

$n=k+1$ のとき　①において (左辺)－(右辺) を計算すると

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}&>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}\\&=\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}\\&=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}\\&=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0\end{aligned}$$

よって　$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$　より　$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

［1］，［2］より，$n\geqq 2$ であるすべての自然数において①は成り立つ．

**類題 39 ― 2**

$n$ を 4 以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

$$2^n>3n+1$$

$2^n>3n+1$　……①

［1］　$n=4$ のとき　　(左辺)$=2^4=16$　　(右辺)$=3\cdot 4+1=13$　より　①は成り立つ．

［2］　$k\geqq 4$ として，$n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$$2^k>3k+1$$

$n=k+1$ のとき　①において (左辺)－(右辺) を計算すると

$$\begin{aligned}2^{k+1}-\{3(k+1)+1\}&=2\cdot 2^k-(3k+4)>2\cdot(3k+1)-(3k+4)\\&=3k-2>0\end{aligned}$$

よって　$2^{k+1}>\{3(k+1)+1\}$　より　$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

［1］，［2］より，$n\geqq 4$ のすべての自然数において①は成り立つ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 39 − 3**

$a_1=2,\ a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1)　$a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その結果を数学的帰納法によって証明せよ．

(1)　$a_2=2-\dfrac{1}{2}=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$，　$a_3=2-\dfrac{2}{3}=\mathbf{\dfrac{4}{3}}$，　$a_4=2-\dfrac{3}{4}=\mathbf{\dfrac{5}{4}}$

(2)　(1)より　$a_n=\dfrac{n+1}{n}$　……①　と推測される．これを数学的帰納法で証明する．

［1］　$n=1$ のとき　①は明らかに成り立つ．

［2］　$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると　$a_k=\dfrac{k+1}{k}$

$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ より　$a_{k+1}=2-\dfrac{1}{a_k}=2-\dfrac{k}{k+1}=\dfrac{2(k+1)-k}{k+1}=\dfrac{k+2}{k+1}$

よって　$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

［1］，［2］より，すべての自然数において①は成り立つ．

**類題 39 − 3**

$a_1=3,\ a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2-1}{n+1}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1)　$a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その結果を数学的帰納法によって証明せよ．

(1)　$a_2=\dfrac{3^2-1}{1+1}=\mathbf{4}$　　$a_3=\dfrac{4^2-1}{2+1}=\mathbf{5}$　　$a_4=\dfrac{5^2-1}{3+1}=\mathbf{6}$

(2)　(1)より　$a_n=n+2$　……①　と推測される．

［1］　$n=1$ のとき　①は明らかに成り立つ．

［2］　$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると $a_k=k+2$

$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2-1}{n+1}$　より

$$a_{k+1}=\frac{{a_k}^2-1}{k+1}=\frac{(k+2)^2-1}{k+1}=\frac{k^2+4k+3}{k+1}=\frac{(k+1)(k+3)}{k+1}=k+3$$

よって　$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

［1］，［2］より，すべての自然数において①は成り立つ．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 39 ー 4**

偶数の数列　2，4，6，8，…… を，第 $n$ 群が $n$ 個の偶数を含むように分ける．

2 | 4，6 | 8，10，12 | 14，16，18，20 | 22，……

(1)　第 $n$ 群の最後の偶数を求めよ．　　(2)　第 $n$ 群の最初の偶数を求めよ．

(3)　150 は第何群の何番目の数か．

もとの数列の一般項は　$2n$

(1)　第 $n$ 群の末項までにある偶数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

よって第 $n$ 群の最後の偶数は，もとの数列の第 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 項．

したがって，求める数は　$2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}=\boldsymbol{n^2+n}$

(2)　$n \geqq 2$ のとき，第 $n-1$ 群の最後の偶数は，もとの数列の第 $\frac{1}{2}(n-1)n$ 項．

よって，第 $n$ 群の最初の偶数は，もとの数列の第 $\frac{1}{2}(n-1)n+1$ 項．

したがって，求める数は　$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}=(n-1)n+2=\boldsymbol{n^2-n+2}$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

(3)　$2n=150$ より　$n=75$　　よって　150 はもとの数列の第 75 項

150 が第 $n$ 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<75 \leqq \frac{1}{2}n(n+1) \qquad (n-1)n<150 \leqq n(n+1)$$

$11\times12=132$，$12\times13=156$　より　これを満たす自然数 $n$ は $n=12$

よって，150 は第 12 群に属する．

第 11 群の最後の偶数は，もとの数列の第 $\frac{1}{2}\cdot11\cdot12$ 項　つまり　第 66 項．

よって，150 は**第 12 群の 9 番目の数**．



ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 39 － 4**

奇数の数列　1，3，5，7，…… を，第 $n$ 群が $2^{n-1}$ 個の奇数を含むように分ける．

$1\,|\,3,\ 5\,|\,7,\ 9,\ 11,\ 13\,|\,15,\ 17,\ 19,\ \cdots\cdots,\ 29\,|\,31,\ \cdots\cdots$

(1)　第 $n$ 群の最後の奇数を求めよ．　(2)　第 $n$ 群の最初の奇数を求めよ．

(3)　77 は第何群の何番目の数か．

もとの数列の一般項は　$2n-1$

(1)　第 $n$ 群の末項までにある奇数の個数は

$$1+2+4+\cdots\cdots+2^{n-1}=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

よって第 $n$ 群の最後の奇数は，もとの数列の第 $2^n-1$ 項．

したがって，求める数は　$2(2^n-1)-1=\mathbf{2^{n+1}-3}$

(2)　$n\geqq 2$ のとき，第 $n-1$ 群の最後の奇数は，もとの数列の第 $2^{n-1}-1$ 項．

よって，第 $n$ 群の最初の奇数は，もとの数列の第 $(2^{n-1}-1+1)$ 項，つまり第 $2^{n-1}$ 項．

したがって，求める数は　$2\cdot 2^{n-1}-1=\mathbf{2^n-1}$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

(3)　$2n-1=77$ より　$n=39$　　よって　77 はもとの数列の第 39 項．

77 が第 $n$ 群に属するとすると

$2^{n-1}-1<39\leqq 2^n-1$　　$2^{n-1}<40\leqq 2^n$

$2^5=32,\ 2^6=64$　より　これを満たす自然数 $n$ は　$n=6$

よって，77 は第 6 群に属する．

第 5 群の最後の奇数は，もとの数列の第 $2^5-1$ 項　つまり　第 31 項．

よって，77 は**第 6 群の 8 番目の数**．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第40講　平面ベクトル(1)

**例題40－1**

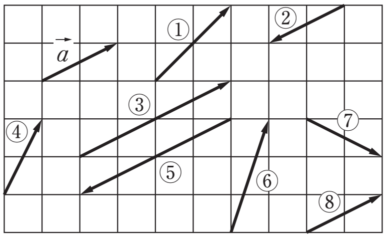
右図について，次のようなベクトルを選べ.

(1)　$\vec{a}$ と大きさが等しいベクトル

(2)　$\vec{a}$ と向きが等しいベクトル

(3)　$\vec{a}$ と等しいベクトル

(4)　$\vec{a}$ の逆ベクトル




(1)　②，④，⑦，⑧　　(2)　③，⑧

(3)　⑧　　(4)　②

**類題40－1**

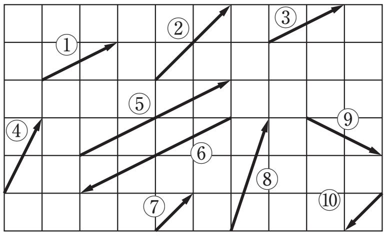
右の図に示されたベクトルについて，次のようなベクトルの組をすべて求めよ.

(1)　大きさが同じベクトル

(2)　向きが同じベクトル

(3)　等しいベクトル

(4)　互いに逆ベクトル




(1)　①と③と④と⑨，⑤と⑥，⑦と⑩

(2)　①と③と⑤，②と⑦

(3)　①と③

(4)　⑤と⑥，⑦と⑩

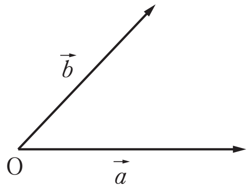
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

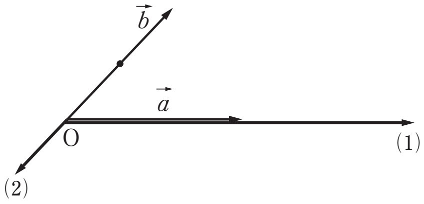
**例題 40 － 2**

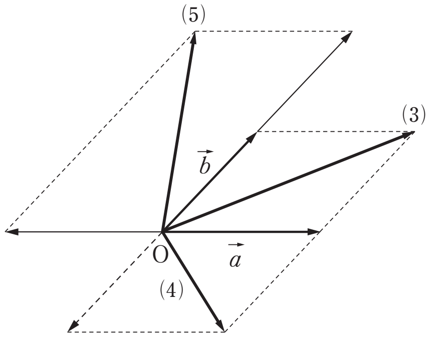
右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを点 O を始点とする有向線分で図示せよ．

(1)　$2\vec{a}$　　(2)　$-\frac{1}{2}\vec{b}$　　(3)　$\vec{a}+\vec{b}$

(4)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(5)　$2\vec{b}-\vec{a}$



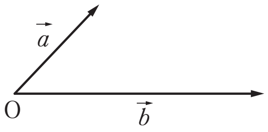



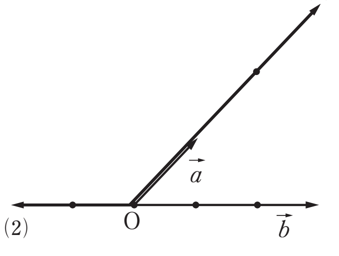

**類題 40 － 2**

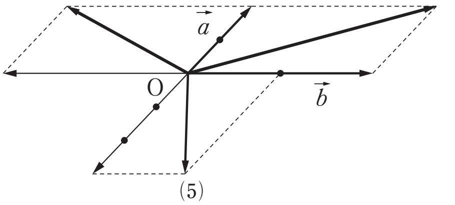
右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを点 O を始点とする有向線分で図示せよ．

(1)　$3\vec{a}$　　(2)　$-\frac{2}{3}\vec{b}$　　(3)　$\vec{a}+\vec{b}$

(4)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(5)　$-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

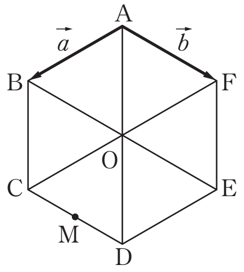
**例題 40 − 3**

正六角形 ABCDEF において，その中心を O，辺 CD の中点を M とする．

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(1)　$\overrightarrow{FC}$　　(2)　$\overrightarrow{MC}$　　(3)　$\overrightarrow{AO}$

(4)　$\overrightarrow{AM}$　　(5)　$\overrightarrow{FB}$




(1)　$\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{FO}=\boldsymbol{2\vec{a}}$　　(2)　$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{b}}$　　(3)　$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}$

(4)　$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}\vec{b}=\boldsymbol{2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}}$

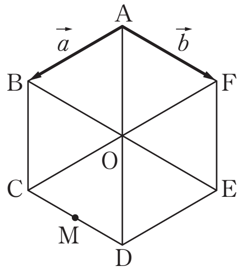
(5)　$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}=-\vec{b}+\vec{a}=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}}$

**類題 40 − 3**

正六角形 ABCDEF において，その中心を O，辺 CD の中点を M とする．

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(1)　$\overrightarrow{OA}$　　(2)　$\overrightarrow{MF}$　　(3)　$\overrightarrow{BF}$




(1)　$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=-\vec{b}-\vec{a}=\boldsymbol{-\vec{a}-\vec{b}}$

(2)　$\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}-(\vec{a}+\vec{b})=\boldsymbol{-2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}}$

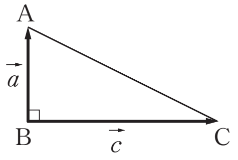
(3)　$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 40 ー 4**

AB＝1，BC＝2，∠B＝90° の直角三角形 ABC がある．
$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．




(1)　$\overrightarrow{BC}$ と同じ向きの単位ベクトル
(2)　$\overrightarrow{AC}$ と平行な単位ベクトル

(1)　$|\overrightarrow{BC}|=2$　　よって　$\overrightarrow{BC}$ と同じ向きの単位ベクトルは　$\dfrac{1}{|\overrightarrow{BC}|}\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{c}}$

(2)　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\vec{c}-\vec{a}=-\vec{a}+\vec{c}$

また，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

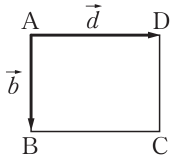
よって，$\overrightarrow{AC}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\overrightarrow{AC}$ と同じ向きのものは　$\dfrac{1}{|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-\vec{a}+\vec{c})=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{a}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{c}}$

$\overrightarrow{AC}$ と反対向きのものは　$-\dfrac{1}{|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-\vec{a}+\vec{c})=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{a}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{c}}$

**類題 40 ー 4**

AB＝3，AD＝4 の長方形 ABCD がある．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．




(1)　$\overrightarrow{AC}$ と同じ向きの単位ベクトル
(2)　$\overrightarrow{BD}$ と平行な単位ベクトル

(1)　$\overrightarrow{AC}=\vec{b}+\vec{d}$

また，線分 AC は長方形 ABCD の対角線であることから　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

よって　$\overrightarrow{AC}$ と同じ向きの単位ベクトルは　$\dfrac{1}{|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{5}(\vec{b}+\vec{d})=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{d}}$

(2)　$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{d}-\vec{b}=-\vec{b}+\vec{d}$

(1)同様　$|\overrightarrow{BD}|=5$

よって　$\overrightarrow{BD}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\overrightarrow{BD}$ と同じ向きのものは　$\dfrac{1}{|\overrightarrow{BD}|}\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{5}(-\vec{b}+\vec{d})=\boldsymbol{-\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{d}}$

$\overrightarrow{BD}$ と反対向きのものは　$-\dfrac{1}{|\overrightarrow{BD}|}\overrightarrow{BD}=-\dfrac{1}{5}(-\vec{b}+\vec{d})=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}\vec{b}-\dfrac{1}{5}\vec{d}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 41 講　平面ベクトル(2)

**例題 41 ー 1**

$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 6)$ のとき，次のベクトルの成分および大きさを求めよ．

(1)　$3\vec{a}-2\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$

(1)　$3\vec{a}-2\vec{b}=3(2,\ 1)-2(-3,\ 6)=(6,\ 3)+(6,\ -12)=\mathbf{(12,\ -9)}$

$|3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{12^2+(-9)^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=\mathbf{15}$

(2)　$\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(-3,\ 6)=\mathbf{(-3t+2,\ 6t+1)}$

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(-3t+2)^2+(6t+1)^2}=\sqrt{\mathbf{45t^2+5}}$

**類題 41 ー 1**

$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(5,\ 1)$ のとき，次のベクトルの成分および大きさを求めよ．

(1)　$-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$

(1)　$-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=-\frac{3}{2}(1,\ 3)+\frac{1}{2}(5,\ 1)=\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{9}{2}\right)+\left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\mathbf{(1,\ -4)}$

$\left|-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+(-4)^2}=\sqrt{\mathbf{17}}$

(2)　$\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 3)+t(5,\ 1)=\mathbf{(5t+1,\ t+3)}$

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(5t+1)^2+(t+3)^2}=\sqrt{\mathbf{26t^2+16t+10}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 41 ー 2**

(1)　$\vec{c}=(3,\ 1)$ と平行な単位ベクトルの成分を求めよ．

(2)　2つのベクトル $\vec{a}=(5,\ 2)$，$\vec{b}=(x,\ 8)$ が平行になるときの $x$ の値を求めよ．

(1)　$|\vec{c}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ より，$\vec{c}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\vec{c}$ と同じ向きのものは　$\dfrac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3,\ 1)=\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{10}}},\ \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{10}}}\right)$

$\vec{c}$ と反対向きのものは　$-\dfrac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3,\ 1)=\left(\boldsymbol{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}},\ \boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{10}}}\right)$

(2)　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ より，$\vec{a}\mathbin{/\mkern-5mu/}\vec{b}$ となるのは　$\vec{b}=k\vec{a}$　となる実数 $k$ が存在するときである．

$(x,\ 8)=k(5,\ 2)$　より　$x=5k,\ 8=2k$

よって　$k=4$　　このとき　$x=\boldsymbol{20}$

**類題 41 ー 2**

(1)　$\vec{c}=(2,\ -3)$ と同じ向きの単位ベクトルの成分を求めよ．

(2)　2つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ x)$ について，$2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行になるときの $x$ の値を求めよ．

(1)　$|\vec{c}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$ より，$\vec{c}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\vec{c}$ と同じ向きのものは　$\dfrac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}(2,\ -3)=\left(\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{13}}},\ \boldsymbol{-\dfrac{3}{\sqrt{13}}}\right)$

(2)　$2\vec{a}+3\vec{b}=2(-1,\ 2)+3(1,\ x)=(1,\ 3x+4)$

$\vec{a}-2\vec{b}=(-1,\ 2)-2(1,\ x)=(-3,\ -2x+2)$

$2\vec{a}+3\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}-2\vec{b}\neq\vec{0}$ より，$2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行になるのは

$2\vec{a}+3\vec{b}=k(\vec{a}-2\vec{b})$ となる実数 $k$ が存在するときである．

$(1,\ 3x+4)=k(-3,\ -2x+2)$ より

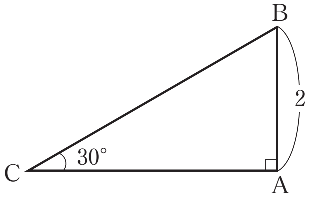
$1=-3k$　……①，　$3x+4=k(-2x+2)$　……②

①より　$k=-\dfrac{1}{3}$　このとき②より　$3x+4=-\dfrac{1}{3}(-2x+2)$　　よって　$x=\boldsymbol{-2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 41 ー 3**

右図のような直角三角形について，次の内積を求めよ．




(1)　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(3)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$　　(4)　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CA}$

$BC=4$，$CA=2\sqrt{3}$

(1)　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos\angle ACB=2\sqrt{3}\times4\times\cos30^\circ=\mathbf{12}$

(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=2\times2\sqrt{3}\times\cos90^\circ=\mathbf{0}$

(3)　$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は $120^\circ$

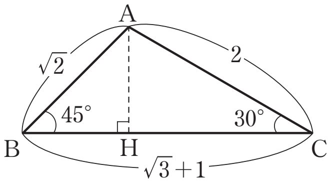
　よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos120^\circ=2\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{-4}$

(4)　$\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{CA}$ のなす角は $180^\circ$

　よって　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CA}|\cos180^\circ=|\overrightarrow{AC}|^2\times(-1)=\mathbf{-12}$

**類題 41 ー 3**

右図のような三角形 ABC において，次の内積を求めよ．




(1)　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$

(3)　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(4)　$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}$

(1)　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}|\cos60^\circ=2\times1\times\frac{1}{2}=\mathbf{1}$

(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{HA}|\cos135^\circ=\sqrt{2}\times1\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{-1}$

(3)　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}=|\overrightarrow{CH}||\overrightarrow{AH}|\cos90^\circ=\mathbf{0}$

(4)　$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}=|\overrightarrow{BH}||\overrightarrow{HC}|\cos0^\circ=1\times\sqrt{3}\times1=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 41 ー 4**

(1)　次の２つのベクトルの内積と，そのなす角 $\theta$ を求めよ．

　(ア)　$\vec{a}=(-1,\ 5)$，$\vec{b}=(2,\ 3)$　　　(イ)　$\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$

(2)　$\vec{a}=(-6,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ x)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるような $x$ の値を求めよ．
また，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような $x$ の値を求めよ．

(1)　(ア)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times2+5\times3=\mathbf{13}$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$　　　$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{13}{\sqrt{26}\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=\mathbf{45^\circ}$

(イ)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times(-1)+2\times2=\mathbf{0}$　　よって　$|\vec{a}|\neq0$，$|\vec{b}|\neq0$ より　$\theta=\mathbf{90^\circ}$

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるのは　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のとき

よって　$(-6)\times2+2\times x=0$　より　$x=\mathbf{6}$

$\vec{a}+\vec{b}=(-4,\ 2+x)$　　$\vec{a}-\vec{b}=(-8,\ 2-x)$

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるのは　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ のとき

よって　$(-4)\times(-8)+(2+x)(2-x)=0$　　$x^2=36$　　よって　$x=\mathbf{\pm6}$

**類題 41 ー 4**

(1)　２つのベクトル $\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -\sqrt{3})$ の内積と，そのなす角 $\theta$ を求めよ．

(2)　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(5,\ 2)$，$\vec{x}=(t-2,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{x}$ が垂直になるような $t$ の値を求めよ．また，$\vec{x}+\vec{a}$，$\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるような $t$ の値を求めよ．

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-\sqrt{3})\times1+1\times(-\sqrt{3})=\mathbf{-2\sqrt{3}}$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$　　　$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=\mathbf{150^\circ}$

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{x}$ が垂直になるのは　$\vec{a}\cdot\vec{x}=0$ のとき

よって　$2\times(t-2)+(-1)\times4=0$　より　$t=\mathbf{4}$

$\vec{x}+\vec{a}=(t,\ 3)$　　$\vec{x}-\vec{b}=(t-7,\ 2)$

$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるのは　$(\vec{x}+\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$ のとき

よって　$t\times(t-7)+3\times2=0$　　$t^2-7t+6=(t-6)(t-1)=0$　　よって　$t=\mathbf{6,\ 1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 42 講　平面ベクトル(3)

**例題 42 − 1**

(1)　次の等式を証明せよ.

(ア)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(イ)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(ウ)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき, $2\vec{a}+\vec{b}$ の大きさを求めよ.

(1)　(ア)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$

(イ)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(ウ)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\times1^2+4\cdot2+3^2=21$

$|2\vec{a}+\vec{b}|>0$ より　$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\mathbf{21}}$

**類題 42 − 1**

(1)　次の等式を証明せよ.

(ア)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　(イ)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき, $2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ.

(1)　(ア)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(イ)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4\times2^2-12\times(-2)+9\times3^2=121$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|>0$ より　$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\mathbf{11}$

**例題 42 − 2**

次の条件を満たす 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について, 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ.

(1)　$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$

(2)　$|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$, $3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直

(1)　$|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$　より　$|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=28$　　つまり　$9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=28$

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$　より　$9\times2^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times1^2=28$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{-1}$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-1}{2\times1}=-\dfrac{1}{2}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=\mathbf{120^\circ}$

(2)　$3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であることより

$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$　　つまり　$3|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$　より　$3\times(\sqrt{2})^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2\times2^2=0$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{-2}$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}\times2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=\mathbf{135^\circ}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 42 － 2**

次の条件を満たす 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ.

(1)　$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|2\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{19}$

(2)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直

(1)　$|2\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{19}$　より　$|2\vec{a}+5\vec{b}|^2=19$　　つまり　$4|\vec{a}|^2+20\vec{a}\cdot\vec{b}+25|\vec{b}|^2=19$

$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$　より　$4\times4^2+20\vec{a}\cdot\vec{b}+25\times(\sqrt{3})^2=19$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{-6}$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-6}{4\times\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=\mathbf{150^\circ}$

(2)　$\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直であることより

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+6\vec{b})=0$　　つまり　$|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$　より　$3^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-6\times2^2=0$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{3}$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{3\times2}=\dfrac{1}{2}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=\mathbf{60^\circ}$

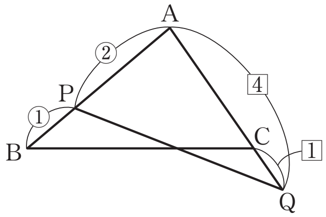
**例題 42 － 3**

3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，次の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.

(1)　辺 AB を 2：1 に内分する点 P　　(2)　辺 AC を 4：1 に外分する点 Q

(3)　△ABC の重心 G　　(4)　△APQ の重心 G′

P$(\vec{p})$，Q$(\vec{q})$，G$(\vec{g})$，G′$(\vec{g'})$ とする.




(1)　$\vec{p}=\dfrac{1\times\vec{a}+2\times\vec{b}}{2+1}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}=\mathbf{\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}}$

(2)　$\vec{q}=\dfrac{-\vec{a}+4\vec{c}}{4-1}=\dfrac{-\vec{a}+4\vec{c}}{3}=\mathbf{-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{c}}$

(3)　辺 BC の中点を M$(\vec{m})$ とすると　$\vec{m}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

よって

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+2\vec{m}}{2+1}=\frac{1}{3}\left\{\vec{a}+2\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\right\}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\mathbf{\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}$$

(4)　$\vec{g'}=\dfrac{\vec{a}+\vec{p}+\vec{q}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{c}\right)=\mathbf{\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}+\dfrac{4}{9}\vec{c}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

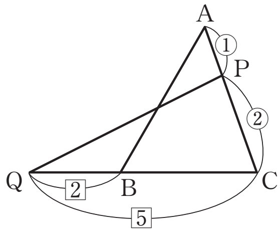
**類題42－3**

3点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$を頂点とする△ABCにおいて，次の位置ベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(1)　辺ACを1：2に内分する点P　　(2)　辺BCを2：5に外分する点Q

(3)　△CPQの重心G

P$(\vec{p})$，Q$(\vec{q})$，G$(\vec{g})$とする．




(1)　$\vec{p}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{c}}{1+2}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}}$

(2)　$\vec{q}=\dfrac{5\vec{b}-2\vec{c}}{-2+5}=\boldsymbol{\dfrac{5}{3}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{c}}$

(3)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{c}+\vec{p}+\vec{q}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{c}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{3}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)$

$=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{5}{9}\vec{b}+\dfrac{2}{9}\vec{c}}$

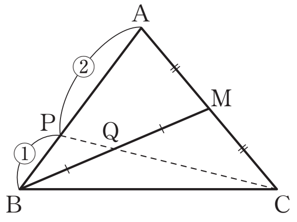
**例題42－4**

△ABCにおいて，辺ABを2：1に内分する点をP，辺ACの中点をM，線分BMの中点をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2)　3点P，Q，Cは一直線上にあることを証明せよ．

(3)　PQ：QCを求めよ．




(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\vec{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}\right)-\dfrac{2}{3}\vec{b}=-\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}=\dfrac{1}{12}(-2\vec{b}+3\vec{c})$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{c}-\dfrac{2}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}(-2\vec{b}+3\vec{c})$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より，3点P，Q，Cは一直線上にある．

(3)　(2)より　PQ：QC＝**1：3**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

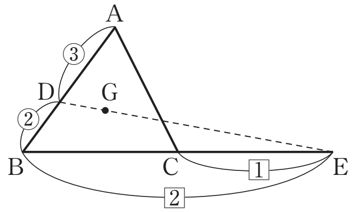
**類題 42 − 4**

△ABC において，辺 AB を 3：2 に内分する点を D，辺 BC を 2：1 に外分する点を E，△ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　辺 BC の中点を M とする．$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3)　3 点 D，G，E は一直線上にあることを証明し，DG：GE を求めよ．




(1)　$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\frac{3}{5}\vec{b}}$

$\overrightarrow{AE}=\frac{-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{2-1}=\boldsymbol{-\vec{b}+2\vec{c}}$

(2)　$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}$

(3)　$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)-\frac{3}{5}\vec{b}=-\frac{4}{15}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{1}{15}(-4\vec{b}+5\vec{c})$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=(-\vec{b}+2\vec{c})-\frac{3}{5}\vec{b}=-\frac{8}{5}\vec{b}+2\vec{c}=\frac{2}{5}(-4\vec{b}+5\vec{c})=\frac{6}{15}(-4\vec{b}+5\vec{c})$

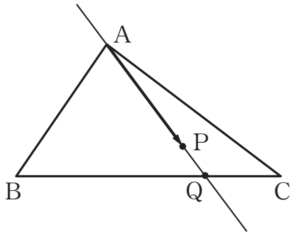
よって　$\overrightarrow{DE}=6\overrightarrow{DG}$ より，3 点 D，G，E は一直線上にある．

DG：GE＝**1：5**

# 第43講　平面ベクトル(4)

**例題43－1**

△ABCと点Pが$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を満たす．また，直線APと直線BCの交点をQとする．このとき，AP：PQ，BQ：QCを求めよ．




$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{7}{9}\left(\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

$\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$は，点Aを始点とし線分BCを5：2に内分する点の位置ベクトルである．

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　であり，**BQ：QC＝5：2**　である．

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$より　**AP：PQ＝7：2**

**(別解)**　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\left(\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\frac{2}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

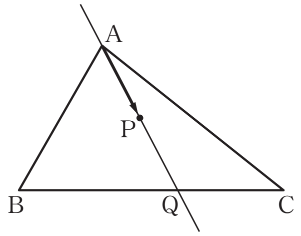
点Qは直線BC上の点より　$\frac{2}{9}k+\frac{5}{9}k=1$　　よって　$k=\frac{9}{7}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{9}{7}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$より　AP：PQ＝7：2

また　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$より　BQ：QC＝5：2

**類題43－1**

△ABCと点Pが$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を満たす．また，直線APと直線BCの交点をQとする．このとき，AP：PQ，BQ：QCを求めよ．




$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{2}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=\frac{5}{10}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

$\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$は，点Aを始点とし線分BCを3：2に内分する点の位置ベクトルである．

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　であり，**BQ：QC＝3：2**　である．

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$より　**AP：PQ＝1：1**

**(別解)**　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\frac{1}{5}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{10}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

点 Q は直線 BC 上の点より　$\frac{1}{5}k+\frac{3}{10}k=1$　　よって　$k=2$

したがって　$\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AP}$ より　　AP：PQ＝1：1

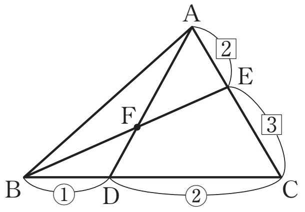
また　$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ より　BQ：QC＝3：2

**例題 43 ー 2**

△ABC で，辺 BC を 1：2 に内分する点を D，辺 CA を 3：2 に内分する点を E とする．また，線分 AD と線分 BE の交点を F とする．

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ．

(2)　$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，BF：FE，AF：FD を求めよ．




(1)　$\mathbf{\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$　　　$\mathbf{\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}}$

(2)　$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AD}$ とおくと，$\overrightarrow{AC}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AE}$ より

$$\overrightarrow{AF}=k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}k\overrightarrow{AE}$$

点 F は線分 BE 上の点より　$\frac{2}{3}k+\frac{5}{6}k=1$　　$k=\frac{2}{3}$

よって　$\mathbf{\overrightarrow{AF}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}}$

また　$\overrightarrow{AF}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AE}$ より　**BF：FE＝5：4**

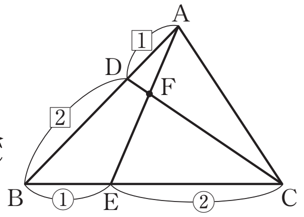
$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ より　**AF：FD＝2：1**

**類題 43 ー 2**

△ABC で，辺 AB，BC を 1：2 に内分する点をそれぞれ D，E とし，線分 CD と線分 AE の交点を F とする．

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ．

(2)　$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，DF：FC，AF：FE を求めよ．




(1)　$\mathbf{\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}}$　　　$\mathbf{\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$

(2)　$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AE}$ とおくと，$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}$ より

$$\overrightarrow{AF}=k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AC}=2k\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AC}$$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

点 F は線分 CD 上の点より　$2k+\frac{1}{3}k=1$　　$k=\frac{3}{7}$

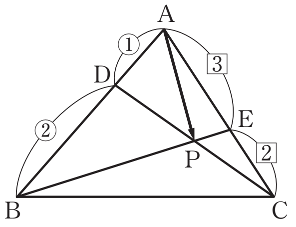
よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{AF}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}}$

また　$\overrightarrow{AF}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$ より　**DF：FC＝1：6**

$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AE}$ より　**AF：FE＝3：4**

**例題 43 － 3**

△ABC において，辺 AB を 1：2 に内分する点を D，辺 AC を 3：2 に内分する点を E とし，線分 BE と線分 CD の交点を P とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ として，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．




BP：PE＝$s$：$(1-s)$　とおくと

$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AE}$

$=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\cdot\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=(1-s)\vec{b}+\frac{3}{5}s\vec{c}$　……①

DP：PC＝$t$：$(1-t)$　とおくと

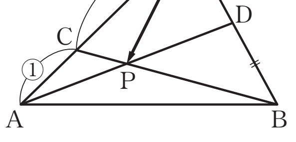
$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AC}=(1-t)\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$　……②

$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立より　$1-s=\frac{1}{3}(1-t)$，$\frac{3}{5}s=t$　　　よって　$s=\frac{5}{6}$，$t=\frac{1}{2}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{AP}=\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$

**類題 43 － 3**

△OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 OB の中点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．




AP：PD＝$s$：$(1-s)$　とおくと

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$

$=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}$　……①

CP：PB＝$t$：$(1-t)$　とおくと

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OB}=(1-t)\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$　……②

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立より　$1-s=\frac{2}{3}(1-t)$，$\frac{1}{2}s=t$　　　よって　$s=\frac{1}{2}$，$t=\frac{1}{4}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

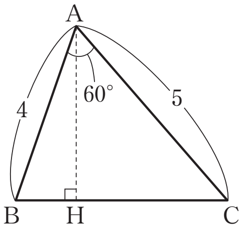
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 43 ー 4**

AB＝4，AC＝5，∠A＝60° の △ABC において，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC の交点を H とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ．　　(2)　$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ．

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする




(1)　$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=5$ より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=4\times5\times\frac{1}{2}=10$$

よって　$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\mathbf{10}$

(2)　BH：HC＝$s$：$(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{AH}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ より　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$　　よって　$\{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

$(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}-(1-s)|\vec{b}|^2+s|\vec{c}|^2-s\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$10(1-s)-16(1-s)+25s-10s=0$　　よって　$s=\dfrac{2}{7}$

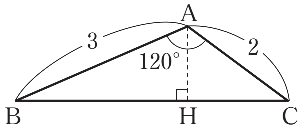
したがって　$\overrightarrow{AH}=\dfrac{5}{7}\vec{b}+\dfrac{2}{7}\vec{c}$　　つまり　$\overrightarrow{\mathbf{AH}}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}\overrightarrow{\mathbf{AC}}$

**類題 43 ー 4**

AB＝3，AC＝2，∠A＝120° の △ABC において，辺 BC 上に点 H を AH⊥BC となるようにとる．このとき次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ．　　(2)　$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ．

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする




(1)　$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=2$ より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 120^\circ=3\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$$

よって　$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\mathbf{-3}$

(2)　BH：HC＝$s$：$(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{AH}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ より　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$　　よって　$\{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

$(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}-(1-s)|\vec{b}|^2+s|\vec{c}|^2-s\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$-3(1-s)-9(1-s)+4s+3s=0$　　よって　$s=\dfrac{12}{19}$

したがって　$\overrightarrow{AH}=\dfrac{7}{19}\vec{b}+\dfrac{12}{19}\vec{c}$　　つまり　$\overrightarrow{\mathbf{AH}}=\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{19}}\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\dfrac{\mathbf{12}}{\mathbf{19}}\overrightarrow{\mathbf{AC}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第44講　平面ベクトル(5)

**例題44－1**

次の直線の方程式を，媒介変数 $t$ を用いて表せ.

(1)　点 A(4, 3) を通り，ベクトル $\vec{d}=(2,\ 1)$ に平行な直線.

(2)　2点 A(−1, 1)，B(2, −5) を通る直線.

求める直線上の任意の点の座標を P$(x,\ y)$ とし，P$(\vec{p})$ とする.

(1)　点 A$(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$　と表せる.

つまり　$(x,\ y)=(4,\ 3)+t(2,\ 1)$

$=(2t+4,\ t+3)$

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{x=2t+4} \\ \boldsymbol{y=t+3} \end{cases}$　（$t$ は媒介変数）

(2)　2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は $\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$　と表せる.

つまり　$(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 1)+t(2,\ -5)$

$=(-1+t,\ 1-t)+(2t,\ -5t)=(3t-1,\ -6t+1)$

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{x=3t-1} \\ \boldsymbol{y=-6t+1} \end{cases}$　（$t$ は媒介変数）

**(別解)**　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,\ -6)$ より，求める直線のベクトル方程式は　$\vec{p}=\vec{a}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　と表せる.

つまり　$(x,\ y)=(-1,\ 1)+t(3,\ -6)=(3t-1,\ -6t+1)$

よって　$\begin{cases} x=3t-1 \\ y=-6t+1 \end{cases}$　（$t$ は媒介変数）

**類題44－1**

次の直線の方程式を，媒介変数 $t$ を用いて表せ.

(1)　点 A(3, 2) を通り，ベクトル $\vec{d}=(1,\ -3)$ に平行な直線.

(2)　2点 A(−1, 0)，B(0, 2) を通る直線.

求める直線上の任意の点の座標を P$(x,\ y)$ とし，P$(\vec{p})$ とする.

(1)　点 A$(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$　と表せる.

つまり　$(x,\ y)=(3,\ 2)+t(1,\ -3)=(t+3,\ -3t+2)$

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{x=t+3} \\ \boldsymbol{y=-3t+2} \end{cases}$　（$t$ は媒介変数）

(2)　2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は $\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$　と表せる.

つまり　$(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 0)+t(0,\ 2)$

$=(-1+t,\ 0)+(0,\ 2t)=(t-1,\ 2t)$

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{x=t-1} \\ \boldsymbol{y=2t} \end{cases}$　（$t$ は媒介変数）

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**(別解)** $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 2)$ より，求める直線のベクトル方程式は $\vec{p}=\vec{a}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表せる．

つまり $(x,\ y)=(-1,\ 0)+t(1,\ 2)=(t-1,\ 2t)$

よって $\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t \end{cases}$ （$t$ は媒介変数）

**例題 44 － 2**

(1) 点 $\mathrm{A}(3,\ -4)$ を通り，$\vec{n}=(2,\ -3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$ から直線 $l：x-3y+2=0$ に垂線を引き，$l$ との交点を H とする．H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ．

(1) 求める直線上の任意の点の座標を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ である．

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ y+4)$ より $2(x-3)-3(y+4)=0$

よって求める方程式は $\boldsymbol{2x-3y-18=0}$

(2) $\vec{n}=(1,\ -3)$ とおくと，$\vec{n}$ は直線 $l$ の法線ベクトルの1つである．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}/\!/\vec{n}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$（$k$ は実数）とおける．

$\mathrm{H}(s,\ t)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(s,\ t+1)$ より $(s,\ t+1)=k(1,\ -3)$

よって $s=k,\ t+1=-3k$ より $s=k,\ t=-3k-1$ ……①

また，点 H は直線 $l$ 上の点より $s-3t+2=0$ ……②

②に①を代入して $k-3(-3k-1)+2=0$ 　$k=-\dfrac{1}{2}$

このとき①より $s=-\dfrac{1}{2},\ t=\dfrac{1}{2}$ 　ゆえに $\boldsymbol{\mathrm{H}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ より $\mathrm{AH}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$

**類題 44 － 2**

(1) 点 $\mathrm{A}(5,\ -1)$ を通り，$\vec{n}=(1,\ 3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{A}(4,\ 1)$ から直線 $l：2x-y+3=0$ に垂線を引き，$l$ との交点を H とする．H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ．

(1) 求める直線上の任意の点の座標を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ である．

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-5,\ y+1)$ より $1(x-5)+3(y+1)=0$

よって求める方程式は $\boldsymbol{x+3y-2=0}$

(2) $\vec{n}=(2,\ -1)$ とおくと，$\vec{n}$ は直線 $l$ の法線ベクトルの1つである．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}/\!/\vec{n}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$（$k$ は実数）とおける．

$\mathrm{H}(s,\ t)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(s-4,\ t-1)$ より $(s-4,\ t-1)=k(2,\ -1)$

よって $s-4=2k,\ t-1=-k$ より $s=2k+4,\ t=-k+1$ ……①

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，点Hは直線 $l$ 上の点より　$2s-t+3=0$　……②

②に①を代入して　$2(2k+4)-(-k+1)+3=0$　　$k=-2$

このとき①より　$s=0,\ t=3$　ゆえに　**H(0，3)**

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(-4,\ 2)$　より　$\mathrm{AH}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\mathbf{2\sqrt{5}}$

**例題 44 ー 3**

平面上の定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ と動点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか.

(1)　$|\vec{p}-\vec{a}|=1$　　　(2)　$|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$

(1)　**点Aを中心とする半径1の円**

(2)　$|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$　より　$3\left|\vec{p}-\dfrac{2}{3}\vec{a}\right|=6$　つまり　$\left|\vec{p}-\dfrac{2}{3}\vec{a}\right|=2$

よって**線分OAを2：1に内分する点を中心とする半径2の円**

**類題 44 ー 3**

平面上の異なる2つの定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ と動点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか.

(1)　$|2\vec{p}-\vec{a}|=3$　　　(2)　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=5$

(1)　$|2\vec{p}-\vec{a}|=3$　より　$2\left|\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right|=3$　つまり　$\left|\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right|=\dfrac{3}{2}$

よって　**線分OAの中点を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円**

(2)　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=5$　より　$|3(\vec{p}-\vec{a})+2(\vec{p}-\vec{b})|=5$

$|5\vec{p}-(3\vec{a}+2\vec{b})|=5$　つまり　$\left|\vec{p}-\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}\right|=1$

よって　**線分ABを2：3に内分する点を中心とする半径1の円**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

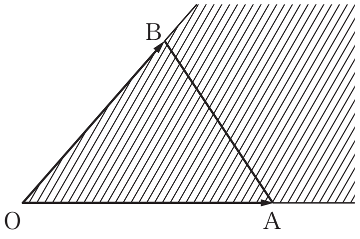
**例題44ー4**

△OABに対し，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$とする．実数$\alpha$，$\beta$が次の条件を満たすとき，点Pはそれぞれどのような図形を描くか．O，A，Bを適当にとって図示せよ．

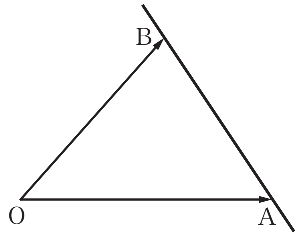
(1)　$\alpha>0$，$\beta>0$　　(2)　$\alpha+\beta=1$

(3)　$\alpha+2\beta=1$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$

(1)　下図斜線部．境界含まず．




(2)　直線AB（下図）

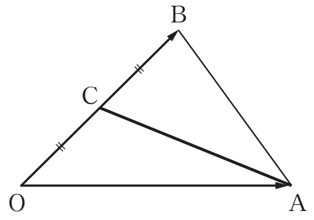



(3)　$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=\alpha\overrightarrow{OA}+2\beta\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$とおくと

$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+2\beta\overrightarrow{OC}$，$\alpha+2\beta=1$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$

よって点Pの存在範囲は線分AC（右図）

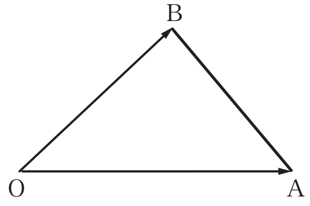



**類題44ー4**

△OABに対し，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$とする．実数$\alpha$，$\beta$が次の条件を満たすとき，点Pはそれぞれどのような図形を描くか．O，A，Bを適当にとって図示せよ．

(1)　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$　　(2)　$3\alpha+\frac{1}{2}\beta=1$

(1)　線分AB（下図）

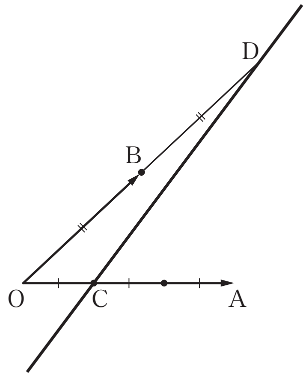



(2)　$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=3\alpha\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\right)+\frac{1}{2}\vec{\beta}\cdot(2\overrightarrow{OB})$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$とおくと

$\overrightarrow{OP}=3\alpha\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\beta\overrightarrow{OD}$，$3\alpha+\frac{1}{2}\beta=1$

よって点Pの存在範囲は直線CD（右図）




ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 45 講　空間ベクトル(1)

**例題 45 ー 1**

(1)　点 P(1, 2, 3) に対して，次の点の座標を求めよ．

(ア)　$xy$ 平面に関して対称な点 A　(イ)　$yz$ 平面に関して対称な点 B

(ウ)　$zx$ 平面に関して対称な点 C　(エ)　$x$ 軸に関して対称な点 D

(オ)　$y$ 軸に関して対称な点 E　(カ)　$z$ 軸に関して対称な点 F

(キ)　点 (0, −1, 5) に関して対称な点 G

(2)　2 点 A(1, 1, 0)，B(3, −2, 4) の間の距離を求めよ．

(1)　(ア)　**A(1, 2, −3)**　(イ)　**B(−1, 2, 3)**　(ウ)　**C(1, −2, 3)**

(エ)　**D(1, −2, −3)**　(オ)　**E(−1, 2, −3)**　(カ)　**F(−1, −2, 3)**

(キ)　**G(−1, −4, 7)**

(2)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}=\boldsymbol{\sqrt{29}}$

**類題 45 ー 1**

(1)　点 P(−2, 1, −1) に対して，次の点の座標を求めよ．

(ア)　$xy$ 平面に関して対称な点 A　(イ)　$z$ 軸に関して対称な点 B

(ウ)　点 (1, −1, 0) に関して対称な点 C

(2)　2 点 A(3, 2, 1)，B(1, 4, −1) の間の距離を求めよ．

(1)　(ア)　**A(−2, 1, 1)**　(イ)　**B(2, −1, −1)**　(ウ)　**C(4, −3, 1)**

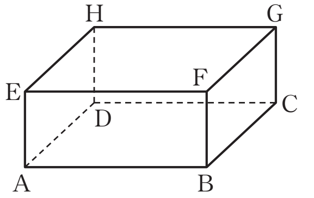
(2)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(4-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-2)^2}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

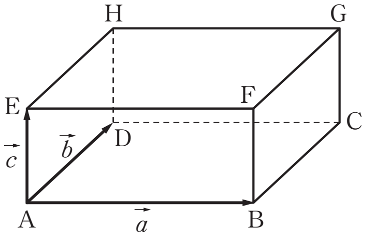
**例題45－2**

直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする．このとき $\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{BH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．



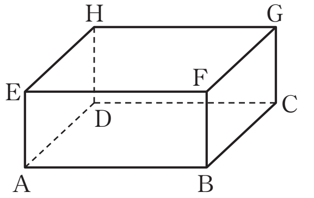

$\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{c}$　　$\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{HA}=-\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　$\overrightarrow{BH}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$



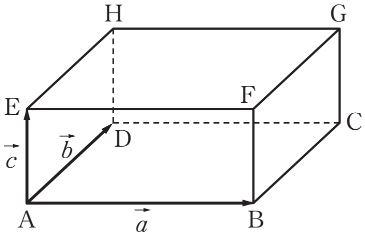

**類題45－2**

直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする．このとき，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{HC}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{DF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．




$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$　　$\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{EB}=\vec{a}-\vec{c}$

$\overrightarrow{EC}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　　$\overrightarrow{DF}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 45 − 3**

(1)　$\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 1)$，$\vec{c}=(2,\ -1,\ -2)$ のとき，$|\vec{a}|$ を求めよ．また，$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ の成分とその大きさを求めよ．

(2)　$\vec{a}=(1,\ -2,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ -2)$，$\vec{c}=(3,\ -2,\ -2)$ のとき，$\vec{p}=(-2,\ 3,\ -2)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ．

(1)　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=2(1,\ -1,\ 2)-3(0,\ 2,\ 1)+(2,\ -1,\ -2)$

$=(2,\ -2,\ 4)+(0,\ -6,\ -3)+(2,\ -1,\ -2)=\boldsymbol{(4,\ -9,\ -1)}$

$|2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{4^2+(-9)^2+(-1)^2}=\sqrt{98}=\boldsymbol{7\sqrt{2}}$

(2)　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおくと

$(-2,\ 3,\ -2)=s(1,\ -2,\ -1)+t(1,\ -1,\ -2)+u(3,\ -2,\ -2)$

つまり　$(-2,\ 3,\ -2)=(s+t+3u,\ -2s-t-2u,\ -s-2t-2u)$

よって　$s+t+3u=-2$　……①　$-2s-t-2u=3$　……②

$-s-2t-2u=-2$　……③

①＋②より　$-s+u=1$　　①×2＋③より　$s+4u=-6$

よって　$s=-2$，$u=-1$　このとき①より　$t=3$

したがって　$\boldsymbol{\vec{p}=-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}}$

**類題 45 − 3**

(1)　$\vec{a}=(3,\ 1,\ 4)$，$\vec{b}=(-1,\ 6,\ 3)$，$\vec{c}=(-2,\ 5,\ 4)$ のとき，$|\vec{c}|$ を求めよ．また，$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$ の成分とその大きさを求めよ．

(2)　$\vec{a}=(0,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ -3)$，$\vec{c}=(3,\ 4,\ -1)$ のとき，$\vec{p}=(-6,\ 7,\ -3)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ．

(1)　$|\vec{c}|=\sqrt{(-2)^2+5^2+4^2}=\sqrt{45}=\boldsymbol{3\sqrt{5}}$

$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}=2(3,\ 1,\ 4)+(-1,\ 6,\ 3)-3(-2,\ 5,\ 4)$

$=(6,\ 2,\ 8)+(-1,\ 6,\ 3)+(6,\ -15,\ -12)=\boldsymbol{(11,\ -7,\ -1)}$

$|2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}|=\sqrt{11^2+(-7)^2+(-1)^2}=\sqrt{171}=\boldsymbol{3\sqrt{19}}$

(2)　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおくと

$(-6,\ 7,\ -3)=s(0,\ 1,\ 1)+t(-1,\ 2,\ -3)+u(3,\ 4,\ -1)$

つまり　$(-6,\ 7,\ -3)=(-t+3u,\ s+2t+4u,\ s-3t-u)$

よって　$-t+3u=-6$　……①　$s+2t+4u=7$　……②　$s-3t-u=-3$　……③

②−③より　$t+u=2$　　これと①より　$t=3$，$u=-1$　　このとき②より　$s=5$

したがって　$\boldsymbol{\vec{p}=5\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 45 ー 4**
3 点 A(2, 1, 0), B(0, 2, 1), C(1, 0, 2) とするとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ．また，△ABC の面積を求めよ．

$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 1,\ 1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,\ -1,\ 2)$ より

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$　　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\times(-1)+1\times(-1)+1\times2=3$

よって　$\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\angle BAC\leqq180^\circ$ より　$\angle BAC=\mathbf{60^\circ}$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin60^\circ=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

**類題 45 ー 4**
3 点 A(2, 1, 2), B(4, 3, 6), C(4, 1, 4) とするとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ．また，△ABC の面積を求めよ．

$\overrightarrow{AB}=(2,\ 2,\ 4)$, $\overrightarrow{AC}=(2,\ 0,\ 2)$ より

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$　　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2+2\times0+4\times2=12$

よって　$\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{12}{2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\angle BAC\leqq180^\circ$ より　$\angle BAC=\mathbf{30^\circ}$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{2\sqrt{3}}$

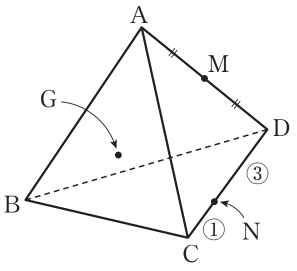
ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 46 講　空間ベクトル(2)

**例題 46 ー 1**

四面体 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする．辺 AD の中点を M，辺 CD を 1：3 に内分する点を N，△ABC の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{NG}}$




$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{4}=\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

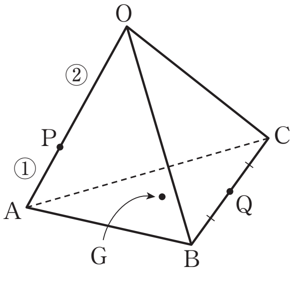
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\left(\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right)-\frac{1}{2}\vec{d}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{d}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{NG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)-\left(\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{5}{12}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{d}}$

**類題 46 ー 1**

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．辺 OA を 2：1 に内分する点を P，辺 BC の中点を Q，△ABC の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}$




$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{2}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\frac{2}{3}\vec{a}=\boldsymbol{-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\boldsymbol{-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

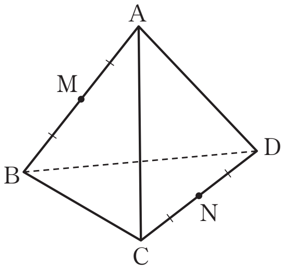
**例題 46 − 2**

1辺の長さが2の正四面体 ABCD がある．辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{MN}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ．また，$\overrightarrow{MN}$ の大きさを求めよ．

(3) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}$ の値を求めよ．




(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=2\times2\times\frac{1}{2}=\mathbf{2}$

(2) (1)同様　$\vec{c}\cdot\vec{d}=2$　　$\vec{d}\cdot\vec{b}=2$

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{AN}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{2}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}$

よって　$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)-\frac{1}{2}\vec{b}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}}$

$|\overrightarrow{MN}|^2=\left|-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right|^2=\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2+\frac{1}{4}|\vec{d}|^2-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{d}\cdot\vec{b}$

$=\frac{1}{4}\times2^2+\frac{1}{4}\times2^2+\frac{1}{4}\times2^2-\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{2}\times2-\frac{1}{2}\times2$

$=1+1+1-1=2$

よって　$|\overrightarrow{MN}|=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

(3) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot\vec{b}$

$=-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{d}$

$=-\frac{1}{2}\times2^2+\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{2}\times2$

$=\mathbf{0}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

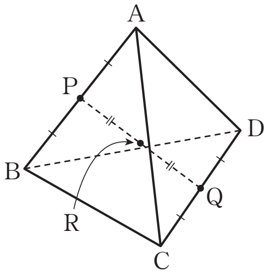
**類題46－2**

1辺の長さが1の正四面体ABCDがある．辺AB，CDの中点をそれぞれP，Qとし，線分PQの中点をRとする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$として，次の問いに答えよ．

(1)　$\vec{b}\cdot\vec{c}$の値を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{AR}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$で表せ．また，$\overrightarrow{AR}$の大きさを求めよ．

(3)　$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BC}$の値を求めよ．




(1)　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=1\times1\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2)　(1)同様　$\vec{c}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}$　　$\vec{d}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{AR}=\frac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}}$$

$$|\overrightarrow{AR}|^2=\left|\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right|^2=\frac{1}{16}|\vec{b}|^2+\frac{1}{16}|\vec{c}|^2+\frac{1}{16}|\vec{d}|^2+\frac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{8}\vec{c}\cdot\vec{d}+\frac{1}{8}\vec{d}\cdot\vec{b}$$

$$=\frac{1}{16}\times1+\frac{1}{16}\times1+\frac{1}{16}\times1+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{16}$$

よって　$|\overrightarrow{AR}|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}}$

(3)　$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$$=\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2-\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{d}-\frac{1}{4}\vec{d}\cdot\vec{b}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times1^2+\frac{1}{4}\times1^2-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{0}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 46 − 3**

(1)　空間の 3 点 A(3，2，6)，B(5，−1，4)，C($x$，$y$，0) が同一直線上にあるとき，$x$，$y$ の値を求めよ.

(2)　平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を M，△BDE の重心を N とするとき，3 点 C，N，M は一直線上にあることを示せ.

(1)　3 点 A，B，C が同一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 $k$ が存在する.

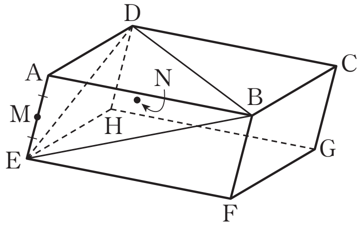
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(x-3,\ y-2,\ -6)$　　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ -3,\ -2)$

よって　$(x-3,\ y-2,\ -6)=k(2,\ -3,\ -2)$　より

$x-3=2k$，$y-2=-3k$，$-6=-2k$

よって　$k=3$　　　したがって　$\boldsymbol{x=9,\ y=-7}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$ とする.




$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}\quad \text{より}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CN}}=\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}\right)-(\vec{b}+\vec{d})$$

$$=-\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}=\frac{1}{3}(-2\vec{b}-2\vec{d}+\vec{e})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\vec{e}-(\vec{b}+\vec{d})=-\vec{b}-\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{e}=\frac{1}{2}(-2\vec{b}-2\vec{d}+\vec{e})$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CN}}$　より　3 点 C，N，M は一直線上にある.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 46 ー 3**

(1)　空間の 3 点 A($a$，$-1$，5)，B(4，$b$，$-7$)，C(5，5，$-13$) が同一直線上にあるとき，$a$，$b$ の値を求めよ．

(2)　平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を P，線分 PC を 1：2 に内分する点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$ とするとき，3 点 A，Q，G は一直線上にあることを示せ．

(1)　3 点 A，B，C が同一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 $k$ が存在する．

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(5-a,\ 6,\ -18)$　　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4-a,\ b+1,\ -12)$

よって　$(5-a,\ 6,\ -18)=k(4-a,\ b+1,\ -12)$　より

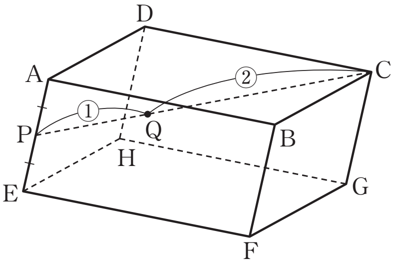
$5-a=k(4-a)$，$6=k(b+1)$，$-18=-12k$

よって　$k=\dfrac{3}{2}$　　　したがって　$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=3}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\vec{e}+\dfrac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d})$

$=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{d}+\dfrac{1}{3}\vec{e}$

$=\dfrac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$




$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$　より　3 点 A，Q，G は一直線上にある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 46 － 4**

空間の 4 点 A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, −1), D(1, 2, $z$) が同一平面上にあるとき，$z$ の値を求めよ.

4 点 A，B，C，D が同一平面上にあるとき，$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 $s$，$t$ が存在する.

$\overrightarrow{AD}=(0,\ 2,\ z)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 0,\ -1)$

よって　$(0,\ 2,\ z)=s(-1,\ 2,\ 0)+t(-1,\ 0,\ -1)$ より

$0=-s-t$　……①　　$2=2s$　……②　　$z=-t$　……③

①，②より　$s=1$，$t=-1$　　このとき③より　$\boldsymbol{z=1}$

**(別解)**　原点を O とすると，点 D が平面 ABC 上にあるとき，

$\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$　を満たす実数 $s$，$t$，$u$ が存在する.

よって　$(1,\ 2,\ z)=s(1,\ 0,\ 0)+t(0,\ 2,\ 0)+u(0,\ 0,\ -1)$ より

$1=s$，$2=2t$，$z=-u$　　これらと $s+t+u=1$ より　$1+1-z=1$

したがって　$z=1$

**類題 46 － 4**

空間の 4 点 A(3, 1, 2), B(4, 2, 3), C(5, 2, 5), D(−2, −1, $z$) が同一平面上にあるとき，$z$ の値を求めよ.

4 点 A，B，C，D が同一平面上にあるとき，$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 $s$，$t$ が存在する.

$\overrightarrow{AD}=(-5,\ -2,\ z-2)$，$\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ 3)$

よって　$(-5,\ -2,\ z-2)=s(1,\ 1,\ 1)+t(2,\ 1,\ 3)$ より

$-5=s+2t$　……①　　$-2=s+t$　……②　　$z-2=s+3t$　……③

①，②より　$s=1$，$t=-3$　　このとき③より　$\boldsymbol{z=-6}$

**(別解)**　原点を O とすると，点 D が平面 ABC 上にあるとき，

$\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$　を満たす実数 $s$，$t$，$u$ が存在する.

よって　$(-2,\ -1,\ z)=s(3,\ 1,\ 2)+t(4,\ 2,\ 3)+u(5,\ 2,\ 5)$ より

$-2=3s+4t+5u$　……①　　$-1=s+2t+2u$　……②

$z=2s+3t+5u$　……③　　$s+t+u=1$　……④

①－④×3 より　$t+2u=-5$　　②－④より　$t+u=-2$

これらより　$u=-3$，$t=1$，$s=3$

このとき③より　$z=-6$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 47 講　空間ベクトル(3)

**例題 47 ー 1**

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．辺 AB を 2：1 に内分する点を P とし，線分 CP を 2：1 に内分する点を Q とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　辺 OA，OB の中点をそれぞれ D，E，辺 OC を 1：2 に内分する点を F とする．3 点 D，E，F を含む平面と線分 OQ の交点を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

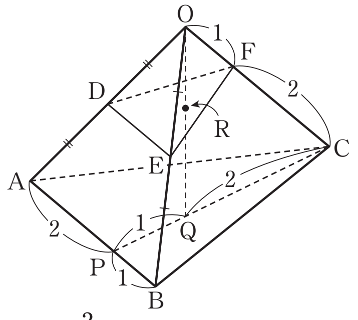
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right)+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2}{9}k\vec{a}+\dfrac{4}{9}k\vec{b}+\dfrac{1}{3}k\vec{c}$　……①　とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{1}{3}\vec{c}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{2}{9}k\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\dfrac{4}{9}k\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\dfrac{1}{3}k\cdot 3\overrightarrow{\mathrm{OF}}$

$=\dfrac{4}{9}k\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\dfrac{8}{9}k\overrightarrow{\mathrm{OE}}+k\overrightarrow{\mathrm{OF}}$




点 R は平面 DEF 上の点より　$\dfrac{4}{9}k+\dfrac{8}{9}k+k=1$　　よって　$k=\dfrac{3}{7}$

したがって①より　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{21}\vec{a}+\dfrac{4}{21}\vec{b}+\dfrac{1}{7}\vec{c}}$

**類題 47 ー 1**

四面体 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする．辺 AB の中点を L，辺 AC を 3：2 に内分する点を M，辺 AD を 1：2 に内分する点を N とする．また，三角形 BCD の重心を G とし，3 点 L，M，N を含む平面と線分 AG の交点を H とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

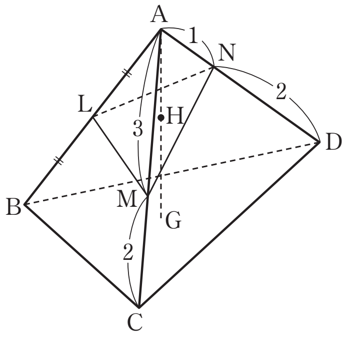
$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}+\dfrac{1}{3}\vec{d}$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}k\vec{b}+\dfrac{1}{3}k\vec{c}+\dfrac{1}{3}k\vec{d}$　……①　とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{3}{5}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\dfrac{1}{3}\vec{d}$　より

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{3}k\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{AL}}+\dfrac{1}{3}k\cdot\dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\dfrac{1}{3}k\cdot 3\overrightarrow{\mathrm{AN}}$

$=\dfrac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{AL}}+\dfrac{5}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AM}}+k\overrightarrow{\mathrm{AN}}$




点 H は平面 LMN 上の点より　$\dfrac{2}{3}k+\dfrac{5}{9}k+k=1$　　よって　$k=\dfrac{9}{20}$

したがって①より　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{20}\vec{b}+\dfrac{3}{20}\vec{c}+\dfrac{3}{20}\vec{d}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 47 ー 2**

四面体 OABC において，OA＝3，OB＝OC＝4，∠BOC＝∠COA＝∠AOB＝60° である．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，平面 ABC 上に点 H をとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$　の値を求めよ．

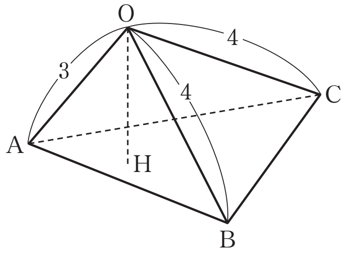
(2)　$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ と表すとき，$s$，$t$，$u$ に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　線分 OH と平面 ABC が垂直であるとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°=3\times4\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{6}$　　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60°=4\times4\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{8}$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60°=4\times3\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{6}$

(2)　点 H は平面 ABC 上の点より　$\boldsymbol{s+t+u=1}$　……①




(3)　OH⊥平面 ABC より　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

よって　$-3s+10t+2u=0$　……②

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$　より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{c}-s|\vec{a}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{c}|^2-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

よって　$-3s+2t+10u=0$　……③

①×3＋②より　$13t+5u=3$　　②－③より　$8t-8u=0$　つまり　$t=u$

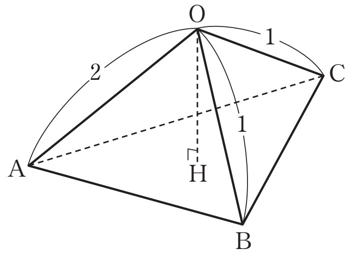
これらより　$t=u=\dfrac{1}{6}$　　このとき①より　$s=\dfrac{2}{3}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{OH}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}}$

**類題 47 ー 2**

四面体 OABC において，OA＝2，OB＝OC＝1，∠AOB＝∠AOC＝60°，∠BOC＝90° である．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，平面 ABC に点 O から垂線 OH を下ろしたとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°=2\times1\times\dfrac{1}{2}=1$　　$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$




$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60°=1\times2\times\dfrac{1}{2}=1$

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおくと，

点 H は平面 ABC 上の点より　$s+t+u=1$　……①

OH⊥平面 ABC より　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$　　よって　$3s+u=0$　……②

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$　より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{c}-s|\vec{a}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{c}|^2-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$　　よって　$3s+t=0$　……③

①，②，③より　$s=-\frac{1}{5}$，$t=\frac{3}{5}$，$u=\frac{3}{5}$

したがって　$\mathbf{\overrightarrow{OH}=-\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}}$

**例題 47 － 3**

2 点 A(5，－2，－3)，B(8，0，－4) を通る直線に，点 O から垂線 OH を下ろす．このとき，点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ．

点 H は直線 AB 上にあるので，$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$（$t$ は実数）と表せる．

つまり　$\overrightarrow{OH}=(5,\ -2,\ -3)+t(3,\ 2,\ -1)=(5+3t,\ -2+2t,\ -3-t)$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ より　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

よって　$3(5+3t)+2(-2+2t)-(-3-t)=0$　　$t=-1$

したがって　$\overrightarrow{OH}=(2,\ -4,\ -2)$　より　**H(2，－4，－2)**

$OH=|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{24}=\mathbf{2\sqrt{6}}$

**類題 47 － 3**

2 点 A(1，3，0)，B(0，4，－1) を通る直線に，点 C(1，5，－4) から垂線 CH を下ろす．このとき，点 H の座標と線分 CH の長さを求めよ．

点 H は直線 AB 上にあるので，$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{AB}$（$t$ は実数）と表せる．

つまり　$\overrightarrow{CH}=(0,\ -2,\ 4)+t(-1,\ 1,\ -1)=(-t,\ -2+t,\ 4-t)$

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ より　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

よって　$-1\cdot(-t)+1\cdot(-2+t)-1\cdot(4-t)=0$　　$t=2$

したがって　$\overrightarrow{CH}=(-2,\ 0,\ 2)$　より

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}=(1,\ 5,\ -4)+(-2,\ 0,\ 2)=(-1,\ 5,\ -2)$　　よって　**H(－1，5，－2)**

$CH=|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{(-2)^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}=\mathbf{2\sqrt{2}}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題47－4**

中心の座標が $(1,\ 0,\ -3)$ で，点 $(3,\ 3,\ -1)$ を通る球面を $S$ とする．

(1)　$S$ と $xy$ 平面の交わりは円である．この円の中心と半径を求めよ．

(2)　$S$ と平面 $z=k$ の交わりが半径1の円になるとき，$k$ の値を求めよ．

(1)　球面 $S$ の半径を $r$ とすると，

$r=\sqrt{(3-1)^2+(3-0)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{2^2+3^2+2^2}=\sqrt{17}$

よって　球面 $S$ の方程式は　$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=17$

この球面 $S$ が $xy$ 平面，すなわち $z=0$ と交わってできる円の方程式は

$(x-1)^2+y^2+3^2=17,\ z=0$　　つまり　$(x-1)^2+y^2=8,\ z=0$

よって　**中心 $(1,\ 0,\ 0)$，半径 $2\sqrt{2}$** の円を表す．

(2)　球面 $S$ が $z=k$ と交わってできる円の方程式は

$(x-1)^2+y^2+(k+3)^2=17,\ z=k$　　つまり　$(x-1)^2+y^2=17-(k+3)^2,\ z=k$

これは　中心 $(1,\ 0,\ k)$，半径 $\sqrt{17-(k+3)^2}$ の円を表す．

半径の条件より　$17-(k+3)^2=1^2$　　$(k+3)^2=16$　　$k+3=\pm4$

よって　$k=\mathbf{-7,\ 1}$

**類題47－4**

直径の両端の座標が $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 4)$，$\mathrm{B}(-5,\ 8,\ -2)$ である球面 $S$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$S$ の方程式を求めよ．

(2)　$S$ と $yz$ 平面の交わりは円である．この円の中心と半径を求めよ．

(3)　$S$ と平面 $y=k$ の交わりが半径4の円になるとき，$k$ の値を求めよ．

(1)　求める球面の中心Cは，線分ABの中点より　$\left(\dfrac{1-5}{2},\ \dfrac{2+8}{2},\ \dfrac{4-2}{2}\right)=(-2,\ 5,\ 1)$

半径は　$\mathrm{AC}=\sqrt{(-3)^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

よって求める球面の方程式は　$\boldsymbol{(x+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27}$

(2)　球面 $S$ が $yz$ 平面，すなわち $x=0$ と交わってできる円の方程式は

$(0+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27,\ x=0$　　つまり　$(y-5)^2+(z-1)^2=23,\ x=0$

よって　**中心 $(0,\ 5,\ 1)$，半径 $\sqrt{23}$** の円を表す．

(3)　球面 $S$ が $y=k$ と交わってできる円の方程式は

$(x+2)^2+(k-5)^2+(z-1)^2=27,\ y=k$

つまり　$(x+2)^2+(z-1)^2=27-(k-5)^2,\ y=k$

これは　中心 $(-2,\ k,\ 1)$，半径 $\sqrt{27-(k-5)^2}$ の円を表す．

半径の条件より　$27-(k-5)^2=4^2$　　$(k-5)^2=11$　　$k-5=\pm\sqrt{11}$

よって　$k=\mathbf{5\pm\sqrt{11}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第48講　整数の性質

**例題48－1**

(1)　次の数が自然数になるような最小の自然数 $n$ を求めよ.

(ア)　$\sqrt{312n}$　　　(イ)　$\sqrt{\dfrac{504}{n}}$

(2)　(ア)　2つの整数 $a, b$ について, $ab=32$ となる組合せ $(a,\ b)$ をすべて挙げよ．ただし, $a \geqq b$ とする.

(イ)　$\sqrt{n^2+32}$ が自然数となるような自然数 $n$ をすべて求めよ.

(1)　(ア)　$\sqrt{312n}$ が自然数になるのは，$312n$ がある自然数の2乗になるときである.

$312=2^3\cdot3\cdot13$ より，求める最小の自然数は　$n=2\cdot3\cdot13=\mathbf{78}$

(イ)　$\sqrt{\dfrac{504}{n}}$ が自然数になるのは，$\dfrac{504}{n}$ がある自然数の2乗になるときである.

$504=2^3\cdot3^2\cdot7$ より，求める最小の自然数は　$n=2\cdot7=\mathbf{14}$

(2)　(ア)　$(a,\ b)=\mathbf{(32,\ 1),\ (16,\ 2),\ (8,\ 4),\ (-1,\ -32),\ (-2,\ -16),\ (-4,\ -8)}$

(イ)　$\sqrt{n^2+32}$ が自然数となるとき

$\sqrt{n^2+32}=k$　($k$：自然数）とおける.

両辺を2乗して　$n^2+32=k^2$　　　$k^2-n^2=32$

つまり　$(k+n)(k-n)=32$　……①

ここで，$k,\ n$ は自然数より　$k+n$ は自然数．よって　$k-n$ も自然数である.

$k+n>k-n$ より，①を満たす自然数 $k+n,\ k-n$ の組は

$(k+n,\ k-n)=(32,\ 1),\ (16,\ 2),\ (8,\ 4)$

よって　$(k,\ n)=(9,\ 7),\ (6,\ 2)$

したがって，求める自然数 $n$ は　$n=\mathbf{2,\ 7}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 48 ー 1**

(1)　次の数が自然数になるような最小の自然数 $n$ を求めよ.

(ア)　$\sqrt{2520n}$　　(イ)　$\sqrt{\dfrac{1386}{n}}$

(2)　$\sqrt{n^2+12}$ が自然数となるような自然数 $n$ をすべて求めよ.

(1)　(ア)　$\sqrt{2520n}$ が自然数になるのは，$2520n$ がある自然数の 2 乗になるときである.

$2520=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$ より，求める最小の自然数は　$n=2\cdot5\cdot7=\mathbf{70}$

(イ)　$\sqrt{\dfrac{1386}{n}}$ が自然数になるのは，$\dfrac{1386}{n}$ がある自然数の 2 乗になるときである.

$1386=2\cdot3^2\cdot7\cdot11$ より，求める最小の自然数は　$n=2\cdot7\cdot11=\mathbf{154}$

(2)　$\sqrt{n^2+12}$ が自然数となるとき，$\sqrt{n^2+12}=k$（$k$：自然数）とおける.

両辺を 2 乗して　$n^2+12=k^2$　　$k^2-n^2=12$

つまり　$(k+n)(k-n)=12$　……①

ここで，$k$，$n$ は自然数より　$k+n$ は自然数．よって　$k-n$ も自然数である.

$k+n>k-n$ より，①を満たす自然数 $k+n$，$k-n$ の組は

$(k+n,\ k-n)=(12,\ 1),\ (6,\ 2),\ (4,\ 3)$

よって　$(k,\ n)=\left(\dfrac{13}{2},\ \dfrac{11}{2}\right),\ (4,\ 2),\ \left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

したがって，求める自然数 $n$ は　$n=\mathbf{2}$

**例題 48 ー 2**

(1)　24 の正の約数の個数を求めよ.

(2)　36，234 の最大公約数と最小公倍数を求めよ.

(1)　$24=2^3\cdot3$ より，24 の正の約数の個数は　$(3+1)\cdot(1+1)=4\cdot2=\mathbf{8}$ **(個)**

(2)　$36=2^2\cdot3^2$　　$234=2\cdot3^2\cdot13$

よって　**最大公約数は**　$2\cdot3^2=\mathbf{18}$　　**最小公倍数は**　$2^2\cdot3^2\cdot13=\mathbf{468}$

**類題 48 ー 2**

(1)　600 の正の約数の個数を求めよ.

(2)　84，126，630 の最大公約数と最小公倍数を求めよ.

(1)　$600=2^3\cdot3\cdot5^2$ より，600 の正の約数の個数は

$(3+1)\cdot(1+1)\cdot(2+1)=4\cdot2\cdot3=\mathbf{24}$ **(個)**

(2)　$84=2^2\cdot3\cdot7$　　$126=2\cdot3^2\cdot7$　　$630=2\cdot3^2\cdot5\cdot7$

よって　**最大公約数は**　$2\cdot3\cdot7=\mathbf{42}$　　**最小公倍数は**　$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7=\mathbf{1260}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 48 ー 3**

$a$，$b$ は整数とする．$a$ を 8 で割ると 3 余り，$b$ を 8 で割ると 6 余る．次の数を 8 で割ったときの余りを求めよ．

(1)　$a+b$　　(2)　$a-b$　　(3)　$ab$

整数 $a$，$b$ は　$a=8l+3$，$b=8m+6$　（$l$，$m$ は整数）と表せる．

(1)　$a+b=(8l+3)+(8m+6)=8(l+m)+9=8(l+m+1)+1$

よって　$a+b$ を 8 で割ったときの余りは　**1**

(2)　$a-b=(8l+3)-(8m+6)=8(l-m)-3=8(l-m-1)+5$

よって　$a-b$ を 8 で割ったときの余りは　**5**

(3)　$ab=(8l+3)(8m+6)=8(8lm+6l+3m)+18=8(8lm+6l+3m+2)+2$

よって　$ab$ を 8 で割ったときの余りは　**2**

**類題 48 ー 3**

$a$，$b$ は整数とする．$a$ を 5 で割ると 2 余り，$b$ を 5 で割ると 3 余る．次の数を 5 で割ったときの余りを求めよ．

(1)　$a+b$　　(2)　$a-2b$　　(3)　$a^2+b^2$

整数 $a$，$b$ は　$a=5l+2$，$b=5m+3$　（$l$，$m$ は整数）と表せる．

(1)　$a+b=(5l+2)+(5m+3)=5(l+m)+5=5(l+m+1)$

よって　$a+b$ を 5 で割ったときの余りは　**0**

(2)　$a-2b=(5l+2)-2(5m+3)=5(l-2m)-4=5(l-2m-1)+1$

よって　$a-2b$ を 5 で割ったときの余りは　**1**

(3)　$a^2+b^2=(5l+2)^2+(5m+3)^2=5(5l^2+4l+5m^2+6m)+13$

$=5(5l^2+4l+5m^2+6m+2)+3$

よって　$ab$ を 5 で割ったときの余りは　**3**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 48 ー 4**
次の 2 つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ．
(1)　697，119　　(2)　1207，994

(1)　$697=119\cdot5+102$
よって　697 と 119 の最大公約数は，119 と 102 の最大公約数に等しい
$119=102\cdot1+17$
よって　119 と 102 の最大公約数は，102 と 17 の最大公約数に等しい
$102=17\cdot6+0$
よって，求める最大公約数は　**17**

(2)　$1207=994\cdot1+213$
$994=213\cdot4+142$
$213=142\cdot1+71$
$142=71\cdot2+0$
よって，求める最大公約数は　**71**

**類題 48 ー 4**
次の 2 つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ．
(1)　930，18　　(2)　1273，469

(1)　$930=18\cdot51+12$
$18=12\cdot1+6$
$12=6\cdot2+0$
よって，求める最大公約数は　**6**

(2)　$1273=469\cdot2+335$
$469=335\cdot1+134$
$335=134\cdot2+67$
$134=67\cdot2+0$
よって，求める最大公約数は　**67**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 49 講　データの分析(1)

**例題 49 ― 1**

次のデータは，10 人の生徒のハンドボール投げの結果である．

21，15，13，12，16，19，18，20，14，15　　（単位は m）

(1)　平均値を求めよ．

(2)　中央値を求めよ．

(3)　この 10 人のデータに新たに 1 人分の生徒のデータを加えた合計 11 人のデータに関して，その平均値が 16 m となった．新たに加えた 1 人のデータの値を求めよ．また，この 11 人のデータの中央値を求めよ．

(1)　$\dfrac{1}{10}(21+15+13+12+16+19+18+20+14+15)=\dfrac{163}{10}=\mathbf{16.3}$ **（m）**

(2)　データの値を小さい順に並べると 12，13，14，15，15，16，18，19，20，21

5 番目と 6 番目のデータの値の平均値をとって，求める中央値は $\dfrac{15+16}{2}=\mathbf{15.5}$ **（m）**

(3)　新たに加えた 1 人の生徒のデータの値を $x$ とすると

$\dfrac{1}{11}(21+15+13+12+16+19+18+20+14+15+x)=16$

$163+x=176$　　$x=13$　　　よって　**13 m**

また，11 人のデータの値を小さい順に並べると

12，13，13，14，15，15，16，18，19，20，21

中央値は 6 番目の値より　**15 m**

**類題 49 ― 1**

次のデータは，ある 2 つのクラス A，B の生徒の，先週一週間において朝食を食べた回数である．

クラス A：2，1，3，5，1，7，5　　　クラス B：6，1，3，3，0，2　　（単位は回）

(1)　クラス A，B を合わせた 13 人のデータの平均値を求めよ．

(2)　クラス A，クラス B の中央値をそれぞれ求めよ．

(3)　クラス A の別の生徒 1 人に新たに聞き取りを行い，この 1 人を加えた 8 人分のクラス A の平均値を出したところ，3.5 回となった．新たに聞き取りを行った生徒のデータの値を求めよ．

(1)　$\dfrac{1}{13}(2+1+3+5+1+7+5+6+1+3+3+0+2)=\dfrac{39}{13}=\mathbf{3}$ **（回）**

(2)　クラス A のデータの値を小さい順に並べると 1，1，2，3，5，5，7

中央値は 4 番目の値より　**3 回**

クラス B のデータの値を小さい順に並べると　0，1，2，3，3，6

3 番目と 4 番目のデータの値の平均値をとって，求める中央値は $\dfrac{2+3}{2}=\mathbf{2.5}$ **（回）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　新たに聞き取りを行った生徒のデータの値を $x$ とすると

$\frac{1}{8}(2+1+3+5+1+7+5+x)=3.5$　　$24+x=28$　　$x=4$　　よって　**4 回**

**例題 49 － 2**

右の表は，あるクラスの生徒 30 人が一学期の間に読んだ本の冊数を調べたものである．

(1)　このデータの最頻値を求めよ．

(2)　この表から階級値を用いて，データの平均値を求めよ．

(3)　階級値を用いないで平均値を求めたとき，データの平均値のとりうる値の範囲を求めよ．

| 階級（冊） | 度数（人） |
|---|---|
| 0 以上 2 未満 | 8 |
| 2 ～ 4 | 10 |
| 4 ～ 6 | 6 |
| 6 ～ 8 | 4 |
| 8 ～10 | 2 |
| 計 | 30 |

(1)　**3 冊**

(2)　$\frac{1}{30}(1\times8+3\times10+5\times6+7\times4+9\times2)=\frac{114}{30}=$**3.8（冊）**

(3)　データの平均値が最小となるのは，それぞれのデータの値が，属する階級の最小値となるときである．

よって　$\frac{1}{30}(0\times8+2\times10+4\times6+6\times4+8\times2)=\frac{84}{30}=2.8$（冊）

データの平均値が最大となるのは，それぞれのデータの値が，属する階級の最大値となるときである．

よって　$\frac{1}{30}(1\times8+3\times10+5\times6+7\times4+9\times2)=\frac{114}{30}=3.8$（冊）

したがって　**2.8 冊以上 3.8 冊以下**

**類題 49 － 2**

右の表は，ある市の 1 日の最高気温を 30 日間調べたものである．

(1)　このデータの最頻値を求めよ．

(2)　この表から階級値を用いて，データの平均値を求めよ．

(3)　階級値を用いないで平均値を求めたとき，データの平均値のとりうる値の範囲を求めよ．

| 階級（℃） | 度数（日） |
|---|---|
| 6 以上 8 未満 | 4 |
| 8～10 | 6 |
| 10～12 | 11 |
| 12～14 | 5 |
| 14～16 | 3 |
| 16～18 | 1 |
| 計 | 30 |

(1)　**11 ℃**

(2)　$\frac{1}{30}(7\times4+9\times6+11\times11+13\times5+15\times3+17\times1)=\frac{330}{30}=$**11（℃）**

(3)　データの平均値が最小となるのは，それぞれのデータの値が，属する階級の最小値となるときである．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$\frac{1}{30}(6\times4+8\times6+10\times11+12\times5+14\times3+16\times1)=\frac{300}{30}=10$ (℃)

データの平均値が最大となるのは，それぞれのデータの値が，属する階級の最大値となるときである．

よって　$\frac{1}{30}(8\times4+10\times6+12\times11+14\times5+16\times3+18\times1)=\frac{360}{30}=12$ (℃)

したがって　**10 ℃以上 12 ℃未満**

**例題 49 ― 3**

次のデータは 2 人の生徒 A，B の 10 回分の小テストの結果である．

A：6，7，5，2，5，10，7，8，7，8

B：3，4，8，6，5，　6，8，5，4，9

（単位は点）

(1)　それぞれのデータの範囲を求めよ．また，それに基づいてデータの散らばりの度合いを比較せよ．

(2)　それぞれのデータの第 1 四分位数 $Q_1$，第 2 四分位数 $Q_2$，第 3 四分位数 $Q_3$ を求めよ．

(3)　それぞれのデータの四分位範囲，四分位偏差を求めよ．また，四分位範囲に基づいて，データの散らばりの度合いを比較せよ．

(1)　A のデータの範囲は　10－2＝**8（点）**　　B のデータの範囲は　9－3＝**6（点）**

よって A の方が範囲が大きいので，**A の方が散らばりの度合いが大きい**

(2)　A のデータを小さい順に並べると 2，5，5，6，7，7，7，8，8，10

よって　$\boldsymbol{Q_1=5}$ **（点）**，$\boldsymbol{Q_2=\frac{7+7}{2}=7}$ **（点）**，$\boldsymbol{Q_3=8}$ **（点）**

B のデータを小さい順に並べると 3，4，4，5，5，6，6，8，8，9

よって　$\boldsymbol{Q_1=4}$ **（点）**，$\boldsymbol{Q_2=\frac{5+6}{2}=5.5}$ **（点）**，$\boldsymbol{Q_3=8}$ **（点）**

(3)　A のデータの四分位範囲は　$Q_3-Q_1=\boldsymbol{3}$ **（点）**　　四分位偏差は　$\frac{3}{2}=\boldsymbol{1.5}$ **（点）**

B のデータの四分位範囲は　$Q_3-Q_1=\boldsymbol{4}$ **（点）**　　四分位偏差は　$\frac{4}{2}=\boldsymbol{2}$ **（点）**

よって B の方が四分位範囲が大きいので，**B の方が散らばりの度合いが大きい**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 49 ー 3**

次のデータは，A 町と B 町のある年における降水日数を月ごとに調べたものである．

A：3，8，12，12，6，9，12，11，13，4，7，11

B：21，19，19，10，15，8，16，8，9，8，19，26

（単位は日）

(1)　それぞれのデータの範囲を求めよ．また，それに基づいてデータの散らばりの度合いを比較せよ．

(2)　それぞれのデータの第 1 四分位数 $Q_1$，第 2 四分位数 $Q_2$，第 3 四分位数 $Q_3$ を求めよ．

(3)　それぞれのデータの四分位範囲，四分位偏差を求めよ．また，四分位範囲に基づいて，データの散らばりの度合いを比較せよ．

(1)　A 町のデータの範囲は　13－3＝**10（日）**　　B 町のデータの範囲は　26－8＝**18（日）**

よって B 町の方が範囲が大きいので，**B 町の方が散らばりの度合いが大きい**

(2)　A 町のデータを小さい順に並べると 3，4，6，7，8，9，11，11，12，12，12，13

よって　$Q_1=\dfrac{6+7}{2}=\mathbf{6.5}$ **（日）**，$Q_2=\dfrac{9+11}{2}=\mathbf{10}$ **（日）**，$Q_3=\dfrac{12+12}{2}=\mathbf{12}$ **（日）**

B 町のデータを小さい順に並べると 8，8，8，9，10，15，16，19，19，19，21，26

よって　$Q_1=\dfrac{8+9}{2}=\mathbf{8.5}$ **（日）**，$Q_2=\dfrac{15+16}{2}=\mathbf{15.5}$ **（日）**，$Q_3=\dfrac{19+19}{2}=\mathbf{19}$ **（日）**

(3)　A 町のデータの四分位範囲は　$Q_3-Q_1=\mathbf{5.5}$ **（日）**　　四分位偏差は　$\dfrac{5.5}{2}=\mathbf{2.75}$ **（日）**

B 町のデータの四分位範囲は　$Q_3-Q_1=\mathbf{10.5}$ **（日）**　　四分位偏差は　$\dfrac{10.5}{2}=\mathbf{5.25}$ **（日）**

よって B 町の方が四分位範囲が大きいので，**B 町の方が散らばりの度合いが大きい**

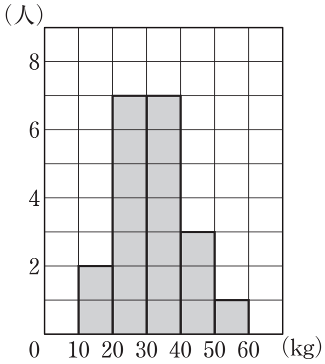
ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

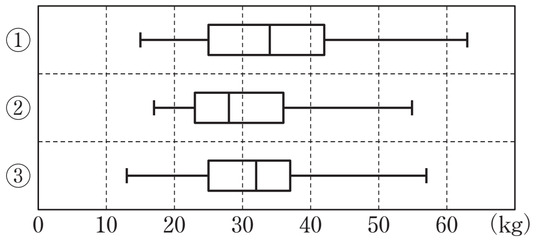
**例題 49 ー 4**

(1)　次のデータは，東京の 2003 年から 2014 年までの最低気温が 25℃以上の日数を，年ごとに調べたものである．このデータの箱ひげ図をかけ．

17，41，31，20，31，25，20，56，49，49，39，29　(単位は日)

(2)　左下の図は, 生徒 20 人の握力のデータをヒストグラムに表したものである．このデータの箱ひげ図として最も適当なものを，右下の①～③から選べ．




(1)　データを小さい順に並べると

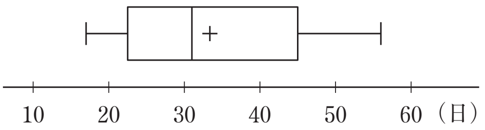
17，20，20，25，29，31，31，39，41，49，49，56

よってこのデータの最小値，第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数，最大値はそれぞれ

$$17,\quad \frac{20+25}{2}=22.5,\quad \frac{31+31}{2}=31,\quad \frac{41+49}{2}=45,\quad 56$$

また，平均値は $\frac{1}{12}(17+20+20+25+29+31+31+39+41+49+49+56)=33.91\cdots$

したがってこのデータの箱ひげ図は下図．




(2)　③

©RECRUIT HOLDINGS

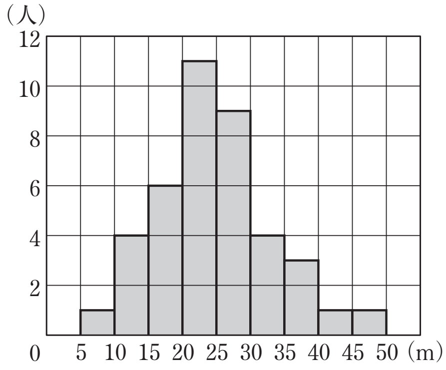
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

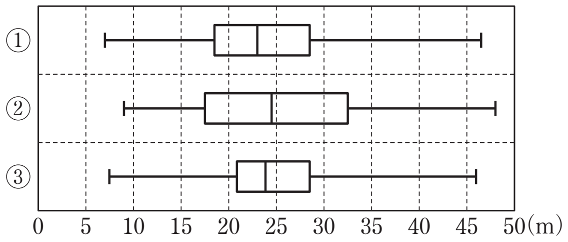
**類題 49 ー 4**

(1)　次のデータは，東京の 2004 年から 2014 年までの最高気温が 30℃以上の日数を，年ごとに調べたものである．このデータの箱ひげ図をかけ．

70，57，38，55，53，38，71，61，66，58，45　（単位は日）

(2)　左下の図は，生徒 40 人のハンドボール投げのデータをヒストグラムに表したものである．このデータの箱ひげ図として最も適当なものを，右下の①～③から選べ．




(1)　データを小さい順に並べると

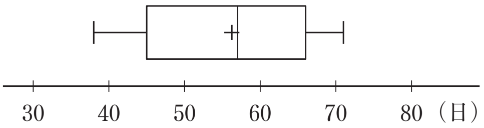
38，38，45，53，55，57，58，61，66，70，71

よってこのデータの最小値，第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数，最大値はそれぞれ

38，45，57，66，71

また平均値は　$\frac{1}{11}(38+38+45+53+55+57+58+61+66+70+71)=55.63\cdots$

したがってこのデータの箱ひげ図は下図．




(2)　①



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第50講　データの分析(2)

**例題50－1**
次のデータは，あるサッカーチームが10試合行ったときの，各試合に決めたゴール数の結果である．
　0，1，4，1，5，1，3，1，0，4（単位は回）
(1)　平均値$\overline{x}$を求めよ．
(2)　偏差を2乗したものの平均値を求めることにより，分散$s^2$を求めよ．
(3)　各値を2乗したものの平均値$\overline{x^2}$を求めることにより，分散$s^2$を求めよ．
(4)　標準偏差$s$を求めよ．

(1)　$\overline{x}=\frac{1}{10}(0+1+4+1+5+1+3+1+0+4)=\frac{20}{10}=\mathbf{2}$ **(回)**

(2)

| $x$ | 0 | 1 | 4 | 1 | 5 | 1 | 3 | 1 | 0 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-\overline{x})^2$ | 4 | 1 | 4 | 1 | 9 | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 |

よって　$s^2=\frac{1}{10}(4+1+4+1+9+1+1+1+4+4)=\frac{30}{10}=\mathbf{3}$

(3)　$\overline{x^2}=\frac{1}{10}(0^2+1^2+4^2+1^5+5^2+1^2+3^2+1^2+0^2+4^2)=\frac{70}{10}=7$

よって　$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2=7-2^2=\mathbf{3}$

(4)　$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{3}=1.732\cdots\fallingdotseq\mathbf{1.73}$ **(回)**

**類題50－1**
次のデータは，アーチストA，Bの新曲をあるレコード店でそれぞれ5名ずつ試聴してもらい，曲の評価を10点満点でつけてもらった結果である．
　アーチストA：5　7　3　6　9
　アーチストB：4　6　5　8　7　（単位は点）
(1)　アーチストAの評価を$x$点とする．変量$x$の平均値$\overline{x}$，標準偏差$s_x$を求めよ．
(2)　アーチストBの評価を$y$点とする．変量$y$の平均値$\overline{y}$，標準偏差$s_y$を求めよ．
(3)　標準偏差に基づいて，アーチストA，Bの評価の散らばりの度合いを比較せよ．

(1)　$\overline{x}=\frac{1}{5}(5+7+3+6+9)=\frac{30}{5}=\mathbf{6}$ **(点)**

| $x$ | 5 | 7 | 3 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x-\overline{x})^2$ | 1 | 1 | 9 | 0 | 9 |

よって　$s_x{}^2=\frac{1}{5}(1+1+9+0+9)=\frac{20}{5}=4$　より　$s_x=\sqrt{4}=\mathbf{2}$ **(点)**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$\overline{y}=\frac{1}{5}(4+6+5+8+7)=\frac{30}{5}=$**6（点）**

| $y$ | 4 | 6 | 5 | 8 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $(y-\overline{y})^2$ | 4 | 0 | 1 | 4 | 1 |

よって　$s_y{}^2=\frac{1}{5}(4+0+1+4+1)=\frac{10}{5}=2$　より　$s_y=\sqrt{2}=1.414\cdots\fallingdotseq$**1.41（点）**

(3)　$s_x>s_y$ より，**アーチスト B の評価の方が値の散らばりの度合いは小さい**

**例題 50 － 2**

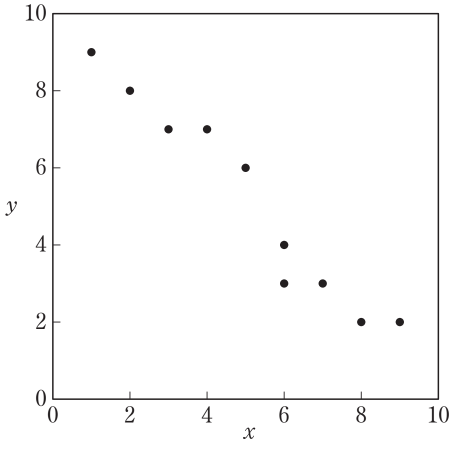
下の表は 2 つの変量 $x$，$y$ のデータである．

| $x$ | 2 | 5 | 1 | 9 | 3 | 6 | 7 | 4 | 8 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 8 | 6 | 9 | 2 | 7 | 4 | 3 | 7 | 2 | 3 |

(1)　変量 $x$，$y$ の散布図をかけ．

(2)　$x$ と $y$ の間には相関関係があるか調べよ．相関がある場合は，正，負のどちらの相関関係があるか答えよ．

(1)




(2)　**負の相関がある**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 50 ー 2**

次のような 2 つの変量 $x$，$y$ についてのデータがある．これらについて，散布図をかき，$x$ と $y$ の間に相関関係があるか調べよ．また，相関がある場合は，正，負のどちらの相関関係があるか答えよ．

(1)

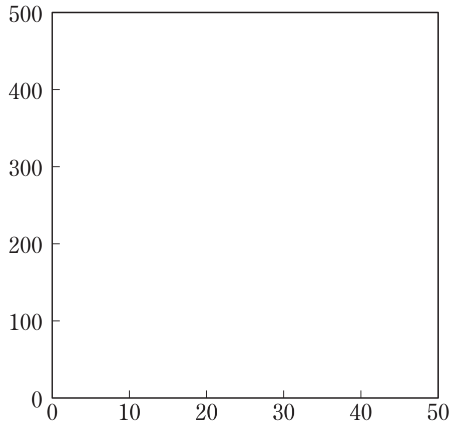
| $x$ | 20 | 25 | 35 | 40 | 30 | 45 | 15 | 25 | 10 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 170 | 190 | 330 | 380 | 240 | 420 | 80 | 210 | 110 | 200 |

(2)

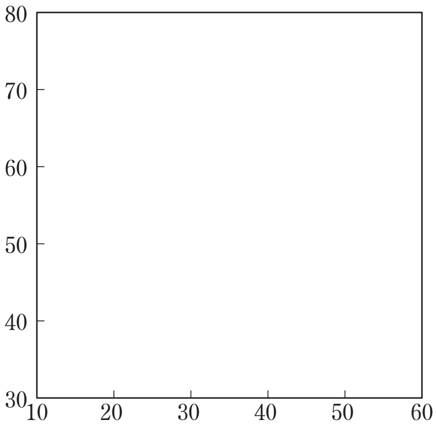
| $x$ | 37 | 28 | 19 | 51 | 16 | 54 | 23 | 47 | 35 | 42 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 53 | 76 | 48 | 65 | 69 | 41 | 34 | 73 | 57 | 32 |

（散布図）

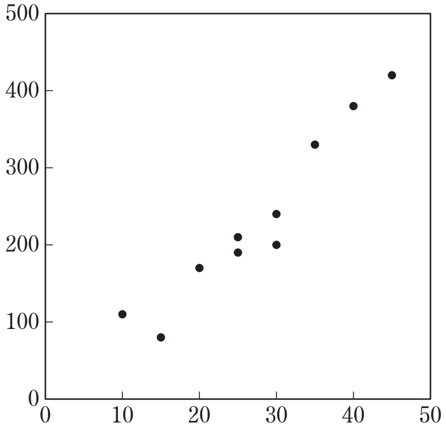
(1)




(2)

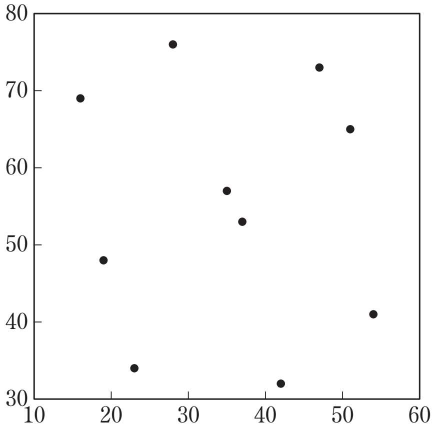



(1)




**正の相関がある**

(2)




**相関がない**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 50 － 3**

次の表は，2つの変量 $x$，$y$ についてのデータである．

| $x$ | 7 | 3 | 5 | 8 | 1 | 6 | 5 | 2 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 6 | 4 | 3 | 7 | 2 | 4 | 5 | 6 | 1 |

(1)　$x$，$y$ の平均値 $\overline{x}$，$\overline{y}$ を求めよ．

(2)　$x$，$y$ の共分散 $s_{xy}$ を求めよ．

(3)　$x$ と $y$ の相関係数 $r$ を求めよ．ただし $\sqrt{15}=3.87$ とし，小数第3位を四捨五入して答えよ．

(4)　$x$ と $y$ の間にはどのような相関があると考えられるか．

| 番号 | $x$ | $y$ | $x-\overline{x}$ | $y-\overline{y}$ | $(x-\overline{x})^2$ | $(y-\overline{y})^2$ | $(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 2 | 2 | −2 | 4 | 4 | −4 |
| 2 | 3 | 6 | −2 | 2 | 4 | 4 | −4 |
| 3 | 5 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 8 | 3 | 3 | −1 | 9 | 1 | −3 |
| 5 | 1 | 7 | −4 | 3 | 16 | 9 | −12 |
| 6 | 6 | 2 | 1 | −2 | 1 | 4 | −2 |
| 7 | 5 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 2 | 5 | −3 | 1 | 9 | 1 | −3 |
| 9 | 4 | 6 | −1 | 2 | 1 | 4 | −2 |
| 10 | 9 | 1 | 4 | −3 | 16 | 9 | −12 |
| 合計 | 50 | 40 | | | 60 | 36 | −42 |

(1)　$\overline{x}=\dfrac{50}{10}=\mathbf{5}$　　　　$\overline{y}=\dfrac{40}{10}=\mathbf{4}$

(2)　$s_{xy}=\dfrac{-42}{10}=\mathbf{-4.2}$

(3)　$r=\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}=\dfrac{\dfrac{1}{10}\times(-42)}{\sqrt{\dfrac{1}{10}\times 60}\sqrt{\dfrac{1}{10}\times 36}}=\dfrac{-42}{\sqrt{60}\sqrt{36}}=-\dfrac{7}{\sqrt{60}}=-\dfrac{7\sqrt{15}}{30}=-\dfrac{7\times 3.87}{30}$

$=-0.903$

よって　$r=\mathbf{-0.90}$

(4)　$r$ は $-1$ に近いので，$x$ と $y$ の間には**強い負の相関がある．**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 50 ー 3**

次の表は，5人の生徒a，b，c，d，eの小テストA，Bの得点である．

| 生徒 | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 10 | 8 | 4 | 7 | 6 |
| B | 6 | 9 | 3 | 5 | 7 |

(1)　Aの得点を$x$，Bの得点を$y$とする．次の表の空欄を埋めよ．

| 生徒 | $x$ | $y$ | $x-\overline{x}$ | $y-\overline{y}$ | $(x-\overline{x})^2$ | $(y-\overline{y})^2$ | $(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | | | | | | | |
| b | | | | | | | |
| c | | | | | | | |
| d | | | | | | | |
| e | | | | | | | |
| 計 | | | ／ | ／ | | | |

(2)　$x$，$y$の共分散$s_{xy}$を求めよ．

(3)　小テストAと小テストBの得点の間にはどのような相関関係があると考えられるか．相関係数$r$を計算して答えよ．

(1)　$\overline{x}=\dfrac{35}{5}=7$　　$\overline{y}=\dfrac{30}{5}=6$

| 生徒 | $x$ | $y$ | $x-\overline{x}$ | $y-\overline{y}$ | $(x-\overline{x})^2$ | $(y-\overline{y})^2$ | $(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | **10** | **6** | **3** | **0** | **9** | **0** | **0** |
| b | **8** | **9** | **1** | **3** | **1** | **9** | **3** |
| c | **4** | **3** | **−3** | **−3** | **9** | **9** | **9** |
| d | **7** | **5** | **0** | **−1** | **0** | **1** | **0** |
| e | **6** | **7** | **−1** | **1** | **1** | **1** | **−1** |
| 計 | **35** | **30** | ／ | ／ | **20** | **20** | **11** |

(2)　$s_{xy}=\dfrac{11}{5}=\mathbf{2.2}$

(3)　$r=\dfrac{\frac{1}{5}\times 11}{\sqrt{\frac{1}{5}\times 20}\sqrt{\frac{1}{5}\times 20}}=\dfrac{11}{\sqrt{20}\sqrt{20}}=\dfrac{11}{20}=0.55$

よって，AとBの得点の間には，**弱い正の相関がある**と考えられる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 50 ー 4**

生徒 10 人の身長を調べたところ，次の表のようになった．

| 身長(cm) | 階級値 | 度数(人) |
|---|---|---|
| 145 以上 155 未満 | 150 | 1 |
| 155～165 | 160 | 2 |
| 165～175 | 170 | 5 |
| 175～185 | 180 | 1 |
| 185～195 | 190 | 1 |
| 計 | | 10 |

(1)　身長の平均値を求めよ．

(2)　170 cm を仮平均とし，身長の平均値を求めよ．

(1)　$\dfrac{1}{10}(150\times1+160\times2+170\times5+180\times1+190\times1)=\dfrac{1690}{10}=\mathbf{169}$ **(cm)**

(2)　$170+\dfrac{1}{10}\{(-20)\times1+(-10)\times2+0\times5+10\times1+20\times1\}=170+\dfrac{-10}{10}=170+(-1)$

$=\mathbf{169}$ **(cm)**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 50 ー 4**

生徒 12 人の体重を調べたところ，次の表のようになった．

| 体重(kg) | 階級値 | 度数(人) |
|---|---|---|
| 45 以上 55 未満 | 50 | 2 |
| 55〜65 | 60 | 2 |
| 65〜75 | 70 | 6 |
| 75〜85 | 80 | 1 |
| 85〜95 | 90 | 1 |
| 計 | | 12 |

(1)　体重の平均値を求めよ．

(2)　70 kg を仮平均とし，体重の平均値を求めよ．

(3)　生徒の体重を $x$ kg とし，生徒の体重から 70 kg を引いた値を階級の幅 10 kg で割った値を $u$ とすると，$u$ についての度数分布表は右のようになる．$u$ の平均値 $\overline{u}$ を求めよ．
また，$70+10\overline{u}$ の値を求めよ．

| $u$ | 度数(人) |
|---|---|
| $-2$ | 2 |
| $-1$ | 2 |
| 0 | 6 |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| | 12 |

(1)　$\dfrac{1}{12}(50\times2+60\times2+70\times6+80\times1+90\times1)=\dfrac{810}{12}=\mathbf{67.5}$ **(kg)**

(2)　$70+\dfrac{1}{12}\{(-20)\times2+(-10)\times2+0\times6+10\times1+20\times1\}=70+\dfrac{-30}{12}=70-2.5$
$=\mathbf{67.5}$ **(kg)**

(3)　$\overline{u}=\dfrac{1}{12}\{(-2)\times2+(-1)\times2+0\times6+1\times1+2\times1\}=\dfrac{-3}{12}=\mathbf{-0.25}$

$70+10\overline{u}=70+10\times(-0.25)=70-2.5=\mathbf{67.5}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 練習問題解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 25 講　指数関数・対数関数(1)

(1)　次の式を計算せよ.

（i）$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{54}=$ ア　　（ii）$\sqrt[3]{4}\times\sqrt{3}\div\sqrt[6]{6}\div\sqrt[3]{3}=\sqrt{\boxed{イ}}$

(2)　次の 3 つの数①，②，③を小さい順に並べると， ウ ， エ ， オ である.

①　$\sqrt[3]{16}$　　②　2　　③　$\sqrt[4]{4}$

(3)　次の方程式・不等式を解け.

（i）$4^x-3\cdot2^{x+1}-16=0$　　$x=$ カ

（ii）$\dfrac{1}{\sqrt{27}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<9$　　キク $<x<\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$

**解答例**

(1)（i）$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{2^2\times2\cdot3^3}=\sqrt[3]{2^3\times3^3}=2\times3=\mathbf{6}$

（ii）$\sqrt[3]{4}\times\sqrt{3}\div\sqrt[6]{6}\div\sqrt[3]{3}=(2^2)^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{2}}\div(2\times3)^{\frac{1}{6}}\div3^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{1}{2}}\times2^{-\frac{1}{6}}\times3^{-\frac{1}{6}}\times3^{-\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}\times3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}\times3^0=\sqrt{2}\times1=\sqrt{\mathbf{2}}$

(2)　$\sqrt[3]{16}=(2^4)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$，$2=2^1$，$\sqrt[4]{4}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}$

底 2 は 1 より大きく，$\dfrac{1}{2}<1<\dfrac{4}{3}$　より　$\sqrt[4]{4}<2<\sqrt[3]{16}$

よって小さい順に　③，②，①

(3)（i）$4^x-3\cdot2^{x+1}-16=0$　より　$(2^x)^2-6\cdot2^x-16=0$

$2^x=t$ とおくと　$t>0$

このとき　$t^2-6t-16=0$　　$(t-8)(t+2)=0$　　$t=8,\ -2$

よって　$t=8$　　つまり　$2^x=8$　より　$x=\mathbf{3}$

（ii）$\dfrac{1}{\sqrt{27}}=\sqrt{\dfrac{1}{27}}=\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\right\}^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$,

$9=3^2=\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\right\}^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

よって　$\dfrac{1}{\sqrt{27}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<9$　より　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいので　$\mathbf{-2}<x<\mathbf{\dfrac{3}{2}}$



ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第26講　指数関数・対数関数(2)

(1)　次の式を計算せよ.

(i)　$\log_2 30-\log_2 15\sqrt{2}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

(ii)　$2\log_3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 6+\log_3\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\boxed{ウ}$

(iii)　$(\log_3 5+\log_9 25)(\log_5 9+\log_{25} 3)=\boxed{エ}$

(2)　次の方程式・不等式を解け.

(i)　$2(\log_2 x)^2+3\log_2 x=2$　　$x=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}},\ \sqrt{\boxed{キ}}$

(ii)　$\log_{\frac{1}{3}} x>-2$　　$\boxed{ク}<x<\boxed{ケ}$

**解答例**

(1)　(i)　$(与式)=\log_2\dfrac{30}{15\sqrt{2}}=\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(ii)　$(与式)=\log_3(\sqrt{3})^2-\log_3 6^{\frac{1}{2}}+\log_3\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\log_3\left(\dfrac{3}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=\log_3 1=\mathbf{0}$

(iii)　$(与式)=\left(\log_3 5+\dfrac{\log_3 25}{\log_3 9}\right)\left(\dfrac{\log_3 9}{\log_3 5}+\dfrac{\log_3 3}{\log_3 25}\right)$

$=\left(\log_3 5+\dfrac{\log_3 5^2}{2}\right)\left(\dfrac{2}{\log_3 5}+\dfrac{1}{\log_3 5^2}\right)$

$=\left(\log_3 5+\dfrac{2\log_3 5}{2}\right)\left(\dfrac{2}{\log_3 5}+\dfrac{1}{2\log_3 5}\right)=2\log_3 5\cdot\dfrac{5}{2\log_3 5}=\mathbf{5}$

(2)　(i)　真数の条件より　$x>0$　……①

$\log_2 x=t$　とおくと　$2t^2+3t-2=0$　　$(2t-1)(t+2)=0$　　$t=\dfrac{1}{2},\ -2$

つまり　$\log_2 x=\dfrac{1}{2},\ -2$　より　$x=2^{\frac{1}{2}},\ 2^{-2}$

したがって　$x=\mathbf{\dfrac{1}{4}},\ \mathbf{\sqrt{2}}$　(①を満たす)

(ii)　真数の条件より　$x>0$　……①

底 $\dfrac{1}{3}$ は1より小さいので　$x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$　　つまり　$x<9$

よって①より　$\mathbf{0<x<9}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 27 講　指数関数・対数関数(3)

(1)　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．$12^{40}$ は **アイ** 桁の整数であり，$0.2^{40}$ は小数第 **ウエ** 位に初めて 0 でない数字が現れる．

(2)　$\left(\dfrac{2}{5}\right)^n<10^{-15}$ を満たす最小の自然数 $n$ は　$n=$ **オカ** である．

(3)　$3^x=12^y=6$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=$ **キ** である．

**解答例**

(1)　$\log_{10}12^{40}=40\log_{10}12=40\log_{10}(2^2\times3)=40(\log_{10}2^2+\log_{10}3)$

$$=40(2\log_{10}2+\log_{10}3)=40(2\times0.3010+0.4771)=43.164$$

よって　$12^{40}=10^{43.164}$ より　$10^{43}<12^{40}<10^{44}$

したがって　$12^{40}$ は **44** 桁の整数である．

$$\log_{10}0.2^{40}=40\log_{10}\frac{2}{10}=40(\log_{10}2-\log_{10}10)=40(0.3010-1)=-27.96$$

よって　$0.2^{40}=10^{-27.96}$　より　$10^{-28}<0.2^{40}<10^{-27}$

したがって　$0.2^{40}$ は小数第 **28** 位に初めて 0 でない数字が現れる．

(2)　$\left(\dfrac{2}{5}\right)^n<10^{-15}$ について，両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{2}{5}\right)^n<\log_{10}10^{-15}\quad\cdots\cdots①$$

$$\log_{10}\left(\frac{2}{5}\right)^n=n\log_{10}\frac{4}{10}=n(2\log_{10}2-1)=n(2\times0.3010-1)=-0.398n$$

よって①は　$-0.398n<-15$　　$n>\dfrac{15}{0.398}=37.6\cdots\cdots$

したがって求める最小の自然数は　$n=\mathbf{38}$

(3)　$3^x=6$ より　$x=\log_3 6=1+\log_3 2$

$12^y=6$　より　$y=\log_{12}6=\dfrac{\log_3 6}{\log_3 12}=\dfrac{\log_3(2\times3)}{\log_3(2^2\times3)}=\dfrac{\log_3 2+1}{2\log_3 2+1}$

よって　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{1+\log_3 2}+\dfrac{2\log_3 2+1}{\log_3 2+1}$

$$=\frac{2(1+\log_3 2)}{1+\log_3 2}=\mathbf{2}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第28講　式と証明(1)

(1)　$(x+2y)^5$ の展開式で，$x^3y^2$ の項の係数は［アイ］である．

(2)　$6x^3+11x^2-2$ を整式 $A$ で割ると，商が $2x^2+3x-1$ で余りが $-1$ である．このとき $A=$［ウ］$x+$［エ］である．

(3)　等式 $x^3-3x^2+7=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$ が $x$ についての恒等式となるとき，$a=$［オ］，$b=$［カ］，$c=$［キ］，$d=$［ク］である．

(4)　等式 $\dfrac{5x+1}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-1}$ が $x$ についての恒等式となるとき，$a=$［ケ］，$b=$［コ］である．

**解答例**

(1)　$(x+2y)^5$ の展開式の一般項は　${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}(2y)^r={}_5\mathrm{C}_r 2^r x^{5-r}y^r$

$x^3y^2$ は $r=2$ のときの項で，その係数は　${}_5\mathrm{C}_2 2^2=\mathbf{40}$ である．

(2)　$6x^3+11x^2-2=A\times(2x^2+3x-1)-1$　と表される．

$6x^3+11x^2-1=A\times(2x^2+3x-1)$

よって　$6x^3+11x^2-1$ は $2x^2+3x-1$ で割り切れ，その商が $A$ である．　したがって　$A=\mathbf{3x+1}$

$$\begin{array}{r|l} & 3x+1 \\ \hline 2x^2+3x-1 & 6x^3+11x^2 \quad\quad -1 \\ & 6x^3+9x^2-3x \\ \hline & \quad 2x^2+3x-1 \\ & \quad 2x^2+3x-1 \\ \hline & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

(3)　(右辺)$=a(x^3-6x^2+12x-8)+b(x^2-4x+4)+cx-2c+d$

$=ax^3+(-6a+b)x^2+(12a-4b+c)x+(-8a+4b-2c+d)$

左辺と係数比較して

$1=a$，$-3=-6a+b$，$0=12a-4b+c$，$7=-8a+4b-2c+d$

これらより　$a=\mathbf{1}$，$b=\mathbf{3}$，$c=\mathbf{0}$，$d=\mathbf{3}$

(4)　(右辺)$=\dfrac{a(x-1)+b(x+2)}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{(a+b)x-a+2b}{(x+2)(x-1)}$

左辺と係数比較して　$5=a+b$，$1=-a+2b$

よって　$a=\mathbf{3}$，$b=\mathbf{2}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 29 講　式と証明(2)

(1)　$3x+y=3z$　……①，$x-3y=-z$　……②　のとき　$x^2+y^2=z^2$ であることを証明する．

①と②より $x$，$y$ を $z$ を用いて表すと　$x=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}z$，$y=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}z$　である．

したがって　$x^2+y^2=\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}z\right)^2+\left(\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}z\right)^2=z^2$　より　$x^2+y^2=z^2$　である．

(2)　不等式 $x^2-6xy+10y^2 \geqq 4y-4$ が成り立つことを証明する．

(左辺)$-$(右辺)$=x^2-6xy+10y^2-4y+4=(x-\boxed{オ}y)^2+(y-\boxed{カ})^2 \geqq 0$

より　$x^2-6xy+10y^2 \geqq 4y-4$　である．

また，等号が成立するのは　$x=\boxed{キ}$，$y=\boxed{ク}$　のときである．

(3)　$|a|<1$，$|b|<1$ のとき，$ab+1>a+b$　であることを証明する．

(左辺)$-$(右辺)$=ab+1-(a+b)=(a-\boxed{ケ})(b-\boxed{コ})$ である．

$|a|<1$　より　$a-1<0$，$|b|<1$　より　$b-1<0$

よって　$(a-\boxed{ケ})(b-\boxed{コ})>0$

したがって　$ab+1>a+b$ である．

**解答例**

(1)　①，②より　$x=\mathbf{\dfrac{4}{5}}z$，$y=\mathbf{\dfrac{3}{5}}z$

したがって　$x^2+y^2=\left(\dfrac{4}{5}z\right)^2+\left(\dfrac{3}{5}z\right)^2=\dfrac{16}{25}z^2+\dfrac{9}{25}z^2=z^2$　より　$x^2+y^2=z^2$

(2)　(左辺)$-$(右辺)$=x^2-6xy+10y^2-4y+4=(x-3y)^2-9y^2+10y^2-4y+4$

$=(x-3y)^2+y^2-4y+4=(x-\mathbf{3}y)^2+(y-\mathbf{2})^2 \geqq 0$

よって　$x^2-6xy+10y^2 \geqq 4y-4$

等号成立は　$x-3y=0$　かつ　$y-2=0$　　つまり　$x=\mathbf{6}$，$y=\mathbf{2}$　のときである．

(3)　$ab+1-(a+b)=(a-1)(b-1)-1+1=(a-\mathbf{1})(b-\mathbf{1})$

$|a|<1$ より　$-1<a<1$　よって　$-2<a-1<0$　　同様に　$-2<b-1<0$

よって　$(a-1)(b-1)>0$　　　したがって　$ab+1>a+b$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 30 講　式と証明(3)・複素数と方程式(1)

(1)　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{9}{x}$ は $x=$ [ア] のとき最小値 [イ] をとる．

(2)　$(2+i)x+(-i+3)y=\dfrac{1}{1+i}$ を満たす実数 $x$，$y$ は　$x=-\dfrac{1}{\boxed{ウ}}$，$y=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$

である．

(3)　2 次方程式 $4x^2-3x+1=0$ の解は　$x=\dfrac{\boxed{キ}\pm\sqrt{\boxed{ク}}\,i}{\boxed{ケ}}$ である．

(4)　2 次方程式 $x^2-2mx+m+2=0$ は　$-\boxed{コ}<m<\boxed{サ}$ のとき異なる 2 つの虚数解をもつ．

**解答例**

(1)　$x>0$，$\dfrac{9}{x}>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$x+\dfrac{9}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{9}{x}}=2\cdot3=6$　　等号成立は　$x=\dfrac{9}{x}$　より　$x=3$ のとき

したがって　$x+\dfrac{9}{x}$　は　$x=\mathbf{3}$ のとき最小値 **6** をとる．

(2)　与式を変形すると

左辺は　$(2x+3y)+(x-y)i$

右辺は　$\dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-i}{1-i^2}=\dfrac{1-i}{1-(-1)}=\dfrac{1-i}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$　となる．

$2x+3y$，$x-y$ は実数より　$2x+3y=\dfrac{1}{2}$，$x-y=-\dfrac{1}{2}$

したがって　$x=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$，$y=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}$

(3)　$4x^2-3x+1=0$　より　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4}=\dfrac{3\pm\sqrt{-7}}{8}=\dfrac{\mathbf{3}\pm\sqrt{\mathbf{7}}\,i}{\mathbf{8}}$

(4)　2 次方程式 $x^2-2mx+m+2=0$ の判別式を $D$ とすると，

$\dfrac{D}{4}=(-m)^2-1\cdot(m+2)=m^2-m-2$

よって，与えられた 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつのは

$D<0$　つまり　$m^2-m-2<0$　より　$(m+1)(m-2)<0$

したがって　$-\mathbf{1}<m<\mathbf{2}$　のときである．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 31 講　複素数と方程式(2)

(1)　2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の解を $\alpha$，$\beta$ とすると，$\alpha^2+\beta^2=-$ [ア]，
$\alpha^3+\beta^3=$ [イウ] である．

(2)　$2x^3+ax^2+bx+6$ は $x+2$ で割り切れ，$x-3$ で割ると 30 余る．このとき
$a=-$ [エ]，$b=-$ [オ] である．

(3)　方程式 $3x^3-x^2-8x-4=0$ の解は　$x=$ [カ]，$-$ [キ]，$-\frac{[ク]}{[ケ]}$ である．

**解答例**

(1)　解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-\frac{2}{1}=-2$，$\alpha\beta=\frac{3}{1}=3$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot3=\mathbf{-2}$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-2)^3-3\cdot3\cdot(-2)=-8+18=\mathbf{10}$

(2)　$P(x)=2x^3+ax^2+bx+6$　とおくと，$Q_1(x)$ を整式として

$P(x)=2x^3+ax^2+bx+6=(x+2)Q_1(x)$　とおける．

$P(-2)=0$　より　$-16+4a-2b+6=0$

よって　$2a-b=5$　……①

また $Q_2(x)$ を整式として，$P(x)=2x^3+ax^2+bx+6=(x-3)Q_2(x)+30$　とおける．

$P(3)=30$　より　$P(3)=54+9a+3b+6=30$

よって　$3a+b=-10$　……②

①，②より　$a=\mathbf{-1}$，$b=\mathbf{-7}$

(3)　$3x^3-x^2-8x-4=0$　より

$(x+1)(3x^2-4x-4)=0$

$(x+1)(3x+2)(x-2)=0$

よって　$x=\mathbf{2}$，$\mathbf{-1}$，$\mathbf{-\frac{2}{3}}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | −1 | −8 | −4 | −1 |
| | −3 | 4 | 4 | |
| 3 | −4 | −4 | 0 | |

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 32 講　微分法(1)

(1)　関数 $f(x)=-3x^2+6x-5$ について，$f'(x)=-$ [ア] $x+$ [イ] である．また $f'(1)=$ [ウ] である．

(2)　曲線 $y=-x^3+5x$ 上の点 $(1,\ 4)$ における接線の方程式は　$y=$ [エ] $x+$ [オ] である．

(3)　関数 $f(x)=x^3-3x^2-1$ のグラフ上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$y=($ [カ] $t^2-$ [キ] $t)x-$ [ク] $t^3+$ [ケ] $t^2-1$

である．よって，この関数のグラフの接線のうち，点 $(0,\ 0)$ を通るものの方程式は

$y=-$ [コ] $x$，$y=\dfrac{\text{[サシ]}}{4}x$ である．

**解答例**

(1)　$f(x)=-3x^2+6x-5$　より　$f'(x)=-\mathbf{6}x+\mathbf{6}$

$f'(1)=-6\cdot1+6=\mathbf{0}$

(2)　$f(x)=-x^3+5x$　とおくと　$f'(x)=-3x^2+5$

点 $(1,\ 4)$ における接線の傾きは　$f'(1)=2$

よって求める接線の方程式は　$y=2(x-1)+4$　　つまり　$y=\mathbf{2}x+\mathbf{2}$

(3)　$f(x)=x^3-3x^2-1$　より　$f'(x)=3x^2-6x$

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$y=(3t^2-6t)(x-t)+t^3-3t^2-1$

つまり　$y=(\mathbf{3}t^2-\mathbf{6}t)x-\mathbf{2}t^3+\mathbf{3}t^2-1$　……①

これが　点 $(0,\ 0)$ を通るとき　　$0=(3t^2-6t)\cdot0-2t^3+3t^2-1$

$2t^3-3t^2+1=0$

$(t-1)(2t^2-t-1)=0$

$(t-1)^2(2t+1)=0$　　よって　$t=1,\ -\dfrac{1}{2}$

したがって求める接線の方程式は，①より

$t=1$ のとき　　$y=-\mathbf{3}x$

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき　　$y=\dfrac{\mathbf{15}}{4}x$

# 第 33 講　微分法(2)

(1)　関数 $y=-x^3+6x^2-9x+2$ は $x=$ ア のとき極小値 $-$ イ ，$x=$ ウ のとき極大値 エ をとる.

(2)　関数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+2$ が $x=1$ で極値 1 をとるとき，$b=-$ オ ，$c=-$ カ である.

(3)　関数 $f(x)=x^3-3ax^2+3ax+1$ が単調に増加するような定数 $a$ の値の範囲は キ $\leqq a \leqq$ ク である.

(4)　関数 $f(x)=x^3-3x^2+4$ の区間 $-2\leqq x\leqq 2$ における最大値は ケ ，最小値は $-$ コサ である.

**解答例**

(1)　$y=-x^3+6x^2-9x+2$　より

$y'=-3x^2+12x-9=-3(x^2-4x+3)=-3(x-1)(x-3)$

$x=1,\ 3$ のとき　$y'=0$　　よって増減表は右図.

したがって　$x=\mathbf{1}$ のとき極小値 $\mathbf{-2}$,

$x=\mathbf{3}$ のとき極大値 $\mathbf{2}$ をとる.

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $y$ | ↘ | $-2$ | ↗ | 2 | ↘ |

(2)　$f(x)=x^3+bx^2+cx+2$　より　$f'(x)=3x^2+2bx+c$

$x=1$ で極値 1 をとるとき　$f'(1)=3+2b+c=0$，$f(1)=1+b+c+2=1$

よって　$b=-1$，$c=-1$

このとき　$f(x)=x^3-x^2-x+2$

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$　　増減表は右図.

よって確かに $x=1$ のとき極値 1 をとる.

ゆえに　$b=\mathbf{-1}$，$c=\mathbf{-1}$

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{3}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | ↗ | $\frac{59}{27}$ | ↘ | 1 | ↗ |

(3)　$f(x)=x^3-3ax^2+3ax+1$　より　$f'(x)=3x^2-6ax+3a$

$f(x)$ が単調に増加するための条件は，常に $f'(x)\geqq 0$ が成り立つことであり，

$f'(x)$ の $x^2$ の係数は正より，2 次方程式 $f'(x)=0$ が実数解を 1 つだけもつ，または実数解をもたなければよい.

$3x^2-6ax+3a=0$　つまり　$x^2-2ax+a=0$ の判別式を $D$ とすると

$\frac{D}{4}=a^2-a\leqq 0$　　$a(a-1)\leqq 0$　　よって　$\mathbf{0\leqq a\leqq 1}$

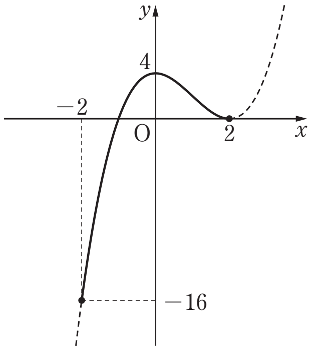
(4)　$f(x)=x^3-3x^2+4$　より　$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$x=0,\ 2$ のとき　$f'(x)=0$

$-2\leqq x\leqq 2$ におけるグラフは右図.

よって　最大値　$f(0)=\mathbf{4}$

最小値　$f(-2)=\mathbf{-16}$




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 34 講　微分法(3)・積分法(1)

(1)　3 次方程式 $2x^3-3x^2-12x-a=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつような $a$ の範囲は
$-$ アイ $<a<$ ウ である．

(2)　定積分 $\int_{-2}^{2}(2x^3+x^2+3x)dx$ の値は $\dfrac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ である．

(3)　等式 $f(x)=x^2+2\int_0^1 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ は　$f(x)=x^2-\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$ である．

(4)　等式 $\int_a^x f(t)dt=x^3-3x^2+x+a$ を満たす関数 $f(x)$ は
$f(x)=$ ケ $x^2-$ コ $x+$ サ である．

**解答例**

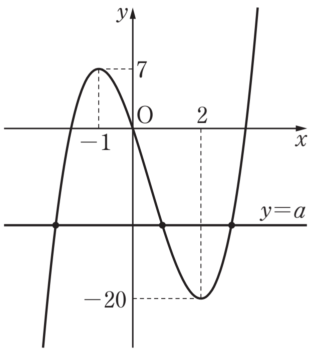
(1)　$2x^3-3x^2-12x-a=0$　より　$2x^3-3x^2-12x=a$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$ とおくと，方程式 $2x^3-3x^2-12x=a$ の異なる実数解の個数は曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ の共有点の個数である．

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$

$f(x)$ の増減表は以下．グラフは右図．

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $7$ | ↘ | $-20$ | ↗ |




よって題意を満たす $a$ の範囲は　$\boldsymbol{-20<a<7}$

(2)　$\int_{-2}^{2}(2x^3+x^2+3x)dx=\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{2}=\left(8+\frac{8}{3}+6\right)-\left(8-\frac{8}{3}+6\right)=\boldsymbol{\frac{16}{3}}$

(3)　$\int_0^1 f(t)dt=a$ とおくと　$f(x)=x^2+2a$

このとき　$a=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(t^2+2a)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+2at\right]_0^1=\frac{1}{3}+2a$　より

$a=\frac{1}{3}+2a$　　$a=-\frac{1}{3}$　　よって　$f(x)=x^2-\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(4)　$\int_a^x f(t)dt=x^3-3x^2+x+a$ の両辺を $x$ で微分して　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=3x^2-6x+1$

よって　$f(x)=\boldsymbol{3}x^2-\boldsymbol{6}x+\boldsymbol{1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 35 講　積分法(2)

(1)　曲線 $y=x^2-2x$ $(x \leqq 1)$，$x$ 軸，直線 $x=-1$，$x=1$ で囲まれた部分の面積は **ア** である．

(2)　2 つの曲線 $y=x^2$，$y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+3$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{イウ}}{\boxed{エ}}$ である．

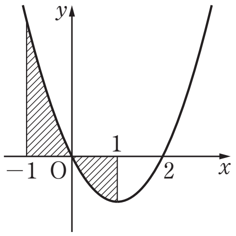
(3)　放物線 $C$：$y=x^2+x-2$ 上の点 $(-2,\ 0)$，$(0,\ -2)$ における接線をそれぞれ $l_1$，$l_2$ とすると，$l_1$ の方程式は　$y=\boxed{オカ}x-\boxed{キ}$，$l_2$ の方程式は　$y=x-\boxed{ク}$ である．

さらに $C$，$l_1$，$l_2$ で囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である．

**解答例**

(1)　$y=x^2-2x=x(x-2)$ より，この曲線と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は　$x=0,\ 2$

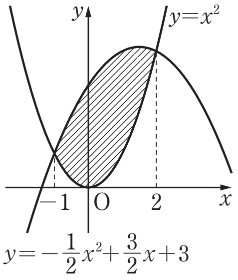
よって　右図より求める面積は




$$\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx-\int_{0}^{1}(x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{1}=\mathbf{2}$$

(2)　$y=x^2$ と $y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+3$ の交点の $x$ 座標は




$$x^2=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3$$

つまり　$x^2-x-2=0$ の 2 解

これを解いて　$x=2,\ -1$

よって右図より求める面積は

$$\int_{-1}^{2}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3\right)-x^2\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3\right)dx=\left[-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+3x\right]_{-1}^{2}=\mathbf{\frac{27}{4}}$$

(3)　$y=x^2+x-2$　より　$y'=2x+1$

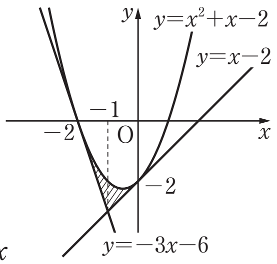
$l_1$ の方程式は　$y=-3(x+2)$　つまり　$y=\mathbf{-3x-6}$

$l_2$ の方程式は　$y=x-\mathbf{2}$

また，$l_1$，$l_2$ の交点の $x$ 座標は

$-3x-6=x-2$　より　$x=-1$

よって右図より求める面積は




$$\int_{-2}^{-1}\{(x^2+x-2)-(-3x-6)\}dx+\int_{-1}^{0}\{(x^2+x-2)-(x-2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x^2+4x+4)dx+\int_{-1}^{0}x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 36 講　数列(1)

(1)　等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とする．$a_4=11$，$a_{12}=35$ のとき，

$a_n=$ ア $n-$ イ ，$S_n=\dfrac{n}{2}($ ウ $n+$ エ $)$，$S_5=$ オカ である．

(2)　公比が実数である等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とする．$a_2=-9$，

$a_5=\dfrac{9}{8}$ のとき，$a_n=$ キク $\cdot\left(-\dfrac{1}{\text{ケ}}\right)^{n-1}$，$S_n=$ コサ $\left\{1-\left(-\dfrac{1}{\text{ケ}}\right)^n\right\}$，

$S_5=\dfrac{\text{シス}}{\text{セ}}$ である．

**解答例**

(1)　等差数列 $\{a_n\}$ の初項を $a$，公差を $d$ とすると

$a_4=11$　より　$a+3d=11$　……①

$a_{12}=35$　より　$a+11d=35$　……②

①，②より　$a=2$，$d=3$

よって　$a_n=2+(n-1)\cdot3=\mathbf{3n-1}$

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}\{2+(3n-1)\}=\frac{n}{2}\mathbf{(3n+1)}$$

$$S_5=\frac{5}{2}(3\cdot5+1)=\mathbf{40}$$

(2)　等比数列 $\{a_n\}$ の初項を $a$，公比を $r$ とすると

$a_2=-9$　より　$ar=-9$　……①

$a_5=\dfrac{9}{8}$　より　$ar^4=\dfrac{9}{8}$　……②

①を②に代入して　$-9r^3=\dfrac{9}{8}$　　$r^3=-\dfrac{1}{8}$　　$r$ は実数より　$r=-\dfrac{1}{2}$

このとき①より　$a=18$　　よって　$a_n=\mathbf{18}\cdot\left(-\dfrac{1}{\mathbf{2}}\right)^{n-1}$

$$S_n=\frac{18\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\cdot18\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\mathbf{12}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$S_5=12\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right\}=12\cdot\frac{33}{32}=\mathbf{\frac{99}{8}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 37 講　数列(2)

(1)　次の和を求めよ.

(i)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-7)=n(n-\boxed{ア})$　　(ii)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}4^k=\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}(4^n-1)$

(2)　数列 1・2，2・3，3・4，…… の初項から第 $n$ 項までの和は

$\dfrac{1}{\boxed{エ}}n(n+\boxed{オ})(n+\boxed{カ})$ である．ただし，$\boxed{オ}<\boxed{カ}$ とする.

(3)　数列 $\{a_n\}$：1，11，111，1111，…… の一般項は　$\dfrac{\boxed{キク}^n-\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$　である.

**解答例**

(1)　(i)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-7)=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-7n=n^2-6n=n(n-\mathbf{6})$

(ii)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}4^k=\frac{4(4^n-1)}{4-1}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}(4^n-1)$

(2)　$\displaystyle 1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)=\frac{1}{\mathbf{3}}n(n+\mathbf{1})(n+\mathbf{2})$$

(3)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする.

$\{b_n\}$：10，100，1000，…… より，数列 $\{b_n\}$ は初項 10，公比 10 の等比数列である.

よって　$b_n=10\cdot10^{n-1}=10^n$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}10^k=1+\frac{10\cdot(10^{n-1}-1)}{10-1}=1+\frac{10^n-10}{9}=\frac{10^n-1}{9}\quad\cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$\dfrac{10^1-1}{9}=1=a_1$　より，①は $n=1$ のときも成り立つ.

したがって　$a_n=\dfrac{\mathbf{10^n-1}}{\mathbf{9}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 38 講　数列(3)

(1)　初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が $S_n=2n^2+5n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=$ [ア] $n+$ [イ] である.

(2)　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ.

(i)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3$　　$a_n=$ [ウ] $n-$ [エ]

(ii)　$a_1=3,\ a_{n+1}=3a_n$　　$a_n=$ [オ]$^n$

(iii)　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+2^n+n$　　$a_n=$ [カ]$^n+\dfrac{1}{[キ]}n^2-\dfrac{1}{[ク]}n$

(iv)　$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-2$　　$a_n=$ [ケ]$^{n-1}+$ [コ]

**解答例**

(1)　$a_1=S_1=2\cdot1^2+5\cdot1=7$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2+5n)-\{2(n-1)^2+5(n-1)\}$

$=2n^2+5n-(2n^2-4n+2+5n-5)=4n+3$　……①

①で $n=1$ のとき　$4\cdot1+3=7$　より，①は $n=1$ のときも成り立つ.

よって　$a_n=\mathbf{4}n+\mathbf{3}$

(2)　(i)　初項 1，公差 3 の等差数列より　$a_n=1+(n-1)\cdot3=\mathbf{3}n-\mathbf{2}$

(ii)　初項 3，公比 3 の等比数列より　$a_n=3\cdot3^{n-1}=\mathbf{3}^n$

(iii)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=2^n+n$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k+k)$$

$$=2+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}+\frac{1}{2}(n-1)n=2^n+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\quad\cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$2^1+\dfrac{1}{2}\cdot1^2-\dfrac{1}{2}\cdot1=2$ より，①は $n=1$ のときも成り立つ.

よって　$a_n=\mathbf{2}^n+\dfrac{1}{\mathbf{2}}n^2-\dfrac{1}{\mathbf{2}}n$

(iv)　$a_{n+1}=3a_n-2$　より　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$，$a_1-1=2-1=1$

よって数列 $\{a_n-1\}$ は初項 1，公比 3 の等比数列であるから

$a_n-1=1\cdot3^{n-1}=3^{n-1}$　　したがって　$a_n=\mathbf{3}^{n-1}+\mathbf{1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 39 講　数列(4)

$a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{4}{n+1}+\dfrac{1}{a_n}$　……①で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう.

$a_2=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ a_3=\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ であることから, $a_n=\left(\dfrac{n+\boxed{カ}}{n}\right)^2$ ……②　と推測される.

[Ⅰ]　$n=1$ のとき　②は明らかに成り立つ.

[Ⅱ]　$n=k$ のとき　②が成り立つと仮定すると　$a_k=\left(\dfrac{k+\boxed{カ}}{k}\right)^2$

このとき　①より　$a_{k+1}=\dfrac{4}{k+1}+\dfrac{1}{a_k}=\left(\dfrac{k+\boxed{キ}}{k+\boxed{ク}}\right)^2$　より

②は $n=k+1$ のときも成り立つ.

[Ⅰ], [Ⅱ] より数学的帰納法から, すべての自然数 $n$ で②が成り立つ.

**解答例**

$a_2=\dfrac{4}{1+1}+\dfrac{1}{a_1}=2+\dfrac{1}{4}=\mathbf{\dfrac{9}{4}}$　　　$a_3=\dfrac{4}{2+1}+\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{9}=\mathbf{\dfrac{16}{9}}$

$a_4=\dfrac{4}{3+1}+\dfrac{1}{a_3}=1+\dfrac{9}{16}=\dfrac{25}{16}$　　よって　$a_n=\left(\dfrac{n+\mathbf{1}}{n}\right)^2$　……②　と推測される.

[Ⅰ]　$n=1$ のとき　②は明らかに成り立つ.

[Ⅱ]　$n=k$ のとき　②が成り立つと仮定すると　$a_k=\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^2$

このとき　①より

$$a_{k+1}=\frac{4}{k+1}+\frac{1}{a_k}=\frac{4}{k+1}+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2$$

$$=\frac{4(k+1)+k^2}{(k+1)^2}=\frac{(k+2)^2}{(k+1)^2}=\left(\frac{k+\mathbf{2}}{k+\mathbf{1}}\right)^2$$　より

②は $n=k+1$ のときも成り立つ.

[Ⅰ], [Ⅱ] より数学的帰納法から, すべての自然数 $n$ で②が成り立つ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

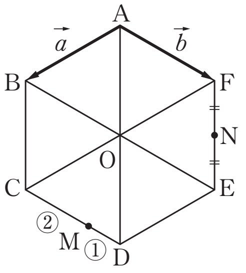
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 40 講　平面ベクトル(1)

(1)　正六角形 ABCDEF において，その中心を O，
辺 CD を 2：1 に内分する点を M，辺 EF の中点を N とし，
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とすると，　$\overrightarrow{AD}=$ [ア] $\vec{a}+$ [イ] $\vec{b}$，

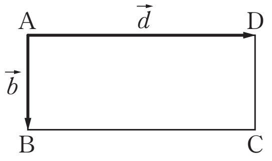
$\overrightarrow{OM}=\vec{a}+\dfrac{[ウ]}{[エ]}\vec{b}$，　$\overrightarrow{MN}=-\dfrac{[オ]}{[カ]}\vec{a}-\dfrac{[キ]}{[ク]}\vec{b}$

である．




(2)　AB＝5，AD＝12 の長方形 ABCD がある．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，
$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とするとき，$\overrightarrow{DB}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$\dfrac{1}{[ケコ]}\vec{b}-\dfrac{1}{[ケコ]}\vec{d}$　である．




**解答例**

(1)　$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2(\vec{a}+\vec{b})=\mathbf{2}\vec{a}+\mathbf{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}=\vec{a}+\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\vec{b}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EN}=\dfrac{1}{3}\vec{b}-\vec{a}+\dfrac{1}{2}(-\vec{a}-\vec{b})=-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\vec{a}-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\vec{b}-\vec{d}$

また，線分 DB は長方形 ABCD の対角線であることから　$|\overrightarrow{DB}|=\sqrt{5^2+12^2}=13$

よって　$\overrightarrow{DB}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表すと

$\dfrac{1}{|\overrightarrow{DB}|}\overrightarrow{DB}=\dfrac{1}{13}(\vec{b}-\vec{d})=\dfrac{1}{\mathbf{13}}\vec{b}-\dfrac{1}{13}\vec{d}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第41講　平面ベクトル(2)

(1)　$\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(x,\ -1)$ のとき　$3\vec{a}+\vec{b}=(x+$ **ア** $,\ -$ **イウ** $)$，
$\vec{a}-\vec{b}=(-x+$ **エ** $,\ -$ **オ** $)$ である．$3\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$ より，$3\vec{a}+\vec{b}$ と
$\vec{a}-\vec{b}$ が平行になるのは $x=\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}$ のときであり，垂直になるときの $x$ の値のうち正
であるものは $x=$ **ク** である．

(2)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $60°$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ **ケ** である．

(3)　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -3)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ は $\theta=$ **コサシ** $°$ である．

**解答例**

(1)　$3\vec{a}+\vec{b}=3(2,\ -3)+(x,\ -1)=(x+\mathbf{6},\ -\mathbf{10})$
　$\vec{a}-\vec{b}=(2,\ -3)-(x,\ -1)=(-x+\mathbf{2},\ -\mathbf{2})$
$3\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$ より，$3\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行になるのは　$3\vec{a}+\vec{b}=k(\vec{a}-\vec{b})$ となる実数 $k$ が存在するときである．
　よって　$(x+6,\ -10)=k(-x+2,\ -2)$ より
　$x+6=k(-x+2)$　……①　　$-10=-2k$　……②
　②より　$k=5$　　このとき①より　$x+6=5(-x+2)$　　よって　$x=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$ のとき
また，$3\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるのは　$(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ が成り立つときである．
よって　$(x+6)(-x+2)+(-10)\cdot(-2)=0$　より　$x^2+4x-32=0$　$x=-8,\ 4$
したがって求める正の数 $x$ は　$x=\mathbf{4}$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°=1\times4\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{2}$

(3)　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$　　$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$
　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+2\times(-3)=-5$
よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$0°\leqq\theta\leqq180°$ より　$\theta=\mathbf{135}°$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 42 講　平面ベクトル(3)

(1)　2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ [ア]，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ は　$\theta=$ [イウ]°，$|\vec{a}-\vec{b}|=$ [エ]　である．

(2)　△OAB の辺 OA を 5：2 に内分する点を C，辺 OB を 5：3 に内分する点を D，△OAB の重心を G とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，3 点 C，G，D が一直線上にあることを証明したい．

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{[オ]}\vec{a}+\dfrac{1}{[オ]}\vec{b}$ であることから

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{21}(-[カ]\vec{a}+[キ]\vec{b})$，

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{5}{56}(-[カ]\vec{a}+[キ]\vec{b})$　である．

よって　$\overrightarrow{CD}=\dfrac{[クケ]}{[コ]}\overrightarrow{CG}$　より，3 点 C，G，D は一直線上にある．

**解答例**

(1)　$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$　より　$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=13$　つまり　$9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$

$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ より　$9\times(\sqrt{3})^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=13$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{3}$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{3}\times 2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=\mathbf{30}^\circ$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=(\sqrt{3})^2-2\times3+2^2=1$

$|\vec{a}-\vec{b}|>0$　より　$|\vec{a}-\vec{b}|=\mathbf{1}$

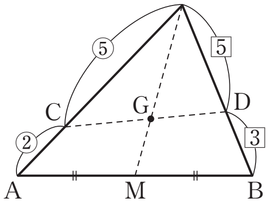
(2)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{\mathbf{3}}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OC}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)-\dfrac{5}{7}\vec{a}=-\dfrac{8}{21}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{21}(-\mathbf{8}\vec{a}+\mathbf{7}\vec{b})$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{5}{8}\vec{b}-\dfrac{5}{7}\vec{a}=\dfrac{5}{56}(-8\vec{a}+7\vec{b})$

$\dfrac{5}{56}\div\dfrac{1}{21}=\dfrac{5}{56}\times21=\dfrac{15}{8}$ より　　$\overrightarrow{CD}=\dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}}\overrightarrow{CG}$

したがって　3 点 C，G，D は一直線上にある．




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 43 講　平面ベクトル(4)

(1)　△ABC の辺 AB を 2：1 に内分する点を D，辺 BC の中点を M とし，線分 AM と CD の交点を E とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表したい．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ である．また，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}k\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\dfrac{k}{\boxed{\text{オ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　と表せる．

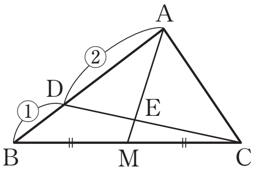
点 E は CD 上の点より　$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}k+\dfrac{k}{\boxed{\text{オ}}}=1$　　よって　$k=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　と表せる．

(2)　OA＝2，OB＝3，∠O＝60° の △OAB において，辺 AB 上に点 H を OH⊥AB となるようにとる．このとき，AH：HB＝$\boxed{\text{サ}}$：$\boxed{\text{シ}}$ である．

**解答例**

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$




$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=\dfrac{k}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\dfrac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}k\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\dfrac{k}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

点 E は CD 上の点より　$\dfrac{3}{4}k+\dfrac{k}{2}=1$　　$k=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とすると　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=2\times 3\times\dfrac{1}{2}=3$

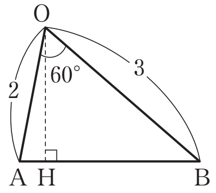
AH：HB＝$s$：$(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

よって　$\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$(1-s)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-s)|\vec{a}|^2+s|\vec{b}|^2-s\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$3\times(1-s)-4\times(1-s)+9s-3s=0$




よって　$s=\dfrac{1}{7}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{6}{7}\vec{a}+\dfrac{1}{7}\vec{b}$　つまり　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　より　AH：HB＝**1**：**6**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 44 講　平面ベクトル(5)

(1)　2 点 A(3, 2), B(5, 6) を通る直線の方程式を媒介変数 $t$ を用いて表すと

$$\begin{cases} x = \boxed{\text{ア}}\,t+3 \\ y=4t+\boxed{\text{イ}} \end{cases}$$ である.

(2)　点 A(3, −2) を通り，直線 OA に垂直な直線の方程式は

$\boxed{\text{ウ}}\,x-\boxed{\text{エ}}\,y-\boxed{\text{オカ}}=0$ である.

(3)　平面上の異なる 2 つの定点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) と動点 P($\vec{p}$) に対し，ベクトル方程式 $|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=6$ は，線分 AB を 1 : $\boxed{\text{キ}}$ に内分する点を中心とする半径 $\boxed{\text{ク}}$ の円を表す.

**解答例**

(1)　求める直線上の任意の点の座標を P($x$, $y$) とし，P($\vec{p}$) とする.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 4)$ より，求める直線のベクトル方程式は　$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　と表せる.

つまり　$(x,\ y)=(3,\ 2)+t(2,\ 4)=(2t+3,\ 4t+2)$

よって　$\begin{cases} x=\mathbf{2}t+3 \\ y=4t+\mathbf{2} \end{cases}$　($t$ は媒介変数)

(2)　求める直線上の任意の点を P($x$, $y$) とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ y+2)$

求める直線の法線ベクトルの 1 つは $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ -2)$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より　$3(x-3)-2(y+2)=0$

よって　$\mathbf{3x-2y-13=0}$

(3)　$|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=6$　より　$|2(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{p}-\vec{b})|=6$

$|3\vec{p}-(2\vec{a}+\vec{b})|=6$　　$3\left|\vec{p}-\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}\right|=6$　　つまり　$\left|\vec{p}-\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}\right|=2$

よって　線分 AB を 1 : **2** に内分する点を中心とする半径 **2** の円を表す.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 45 講　空間ベクトル(1)

(1)　点 P(3, −2, 1) に対し，点 A(−3, −2, 1) は **ア** に関して対称な点であり，点 B(−3, −2, −1) は **イ** に関して対称な点である．**ア**，**イ** に当てはまるものを次の①〜⑥の中から選べ．

① $xy$ 平面　② $yz$ 平面　③ $zx$ 平面
④ $x$ 軸　⑤ $y$ 軸　⑥ $z$ 軸

(2)　$\vec{a}=(2,\ 1,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 2,\ -1)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}=($ **ウ** $+t,\ 1+$ **エ** $t,\ 1-t)$ である．また，$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値は $\dfrac{\boxed{カ}}{\sqrt{\boxed{オ}}}$ である．

(3)　3 点 A(−2, 1, 3), B(−3, 1, 4), C(−3, 3, 5) について，2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角は **キク** ° であり，△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である．

**解答例**

(1)　点 P(3, −2, 1) に対し，点 A(−3, −2, 1) は $yz$ 平面（②）に関して対称な点であり，点 B(−3, −2, −1) は $y$ 軸（⑤）に関して対称な点　である．

(2)　$\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1,\ 1)+t(1,\ 2,\ -1)=(\mathbf{2}+t,\ 1+\mathbf{2}t,\ 1-t)$

$$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(2+t)^2+(1+2t)^2+(1-t)^2}=\sqrt{6t^2+6t+6}=\sqrt{6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}$$

よって　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき　最小値 $\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$

(3)　$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 0,\ 1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,\ 2,\ 2)$ より

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$　　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\times(-1)+0\times2+1\times2=3$

よって　$\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\times3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\angle BAC\leqq180^\circ$ より　$\angle BAC=\mathbf{45}^\circ$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin45^\circ=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times3\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 46 講　空間ベクトル(2)

(1)　1辺の長さが 2 の正四面体 OABC において，辺 OA，BC を 1：2 に内分する点をそれぞれ L，M とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ア ，$\overrightarrow{LM}=-\dfrac{1}{\boxed{イ}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\vec{b}+\dfrac{1}{\boxed{イ}}\vec{c}$，

$|\overrightarrow{LM}|=\dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$ である．

また，$\overrightarrow{LM}\cdot\overrightarrow{OC}=$ キ である．

(2)　4 点 A(1，1，0)，B(3，4，5)，C(1，3，6)，D(4，5，$z$) が同一平面上にあるとき，$z=$ ク である．

**解答例**

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=2\times2\times\cos60^\circ=\mathbf{2}$

$\overrightarrow{OL}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{OM}=\dfrac{2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$　より

$\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OL}=\left(\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)-\dfrac{1}{3}\vec{a}=-\dfrac{1}{\mathbf{3}}\vec{a}+\dfrac{\mathbf{2}}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{LM}|^2&=\left|-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right|^2\\&=\dfrac{1}{9}|\vec{a}|^2+\dfrac{4}{9}|\vec{b}|^2+\dfrac{1}{9}|\vec{c}|^2-\dfrac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{4}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}-\dfrac{2}{9}\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=\dfrac{1}{9}\times2^2+\dfrac{4}{9}\times2^2+\dfrac{1}{9}\times2^2-\dfrac{4}{9}\times2+\dfrac{4}{9}\times2-\dfrac{2}{9}\times2=\dfrac{20}{9}\end{aligned}$$

よって　$|\overrightarrow{LM}|=\dfrac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{3}}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LM}\cdot\overrightarrow{OC}&=\left(-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}+\dfrac{1}{3}|\vec{c}|^2\\&=-\dfrac{1}{3}\times2+\dfrac{2}{3}\times2+\dfrac{1}{3}\times2^2=\mathbf{2}\end{aligned}$$

(2)　4 点 A，B，C，D が同一平面上にあるとき，$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 $s$，$t$ が存在する．

$\overrightarrow{AD}=(3,\ 4,\ z)$，$\overrightarrow{AB}=(2,\ 3,\ 5)$，$\overrightarrow{AC}=(0,\ 2,\ 6)$

よって　$(3,\ 4,\ z)=s(2,\ 3,\ 5)+t(0,\ 2,\ 6)$ より

$3=2s$　……①　　$4=3s+2t$　……②　　$z=5s+6t$　……③

①，②より　$s=\dfrac{3}{2}$，$t=-\dfrac{1}{4}$　　このとき③より　$z=\mathbf{6}$

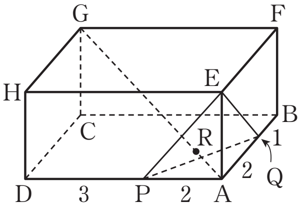
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 47 講　空間ベクトル(3)

(1)　右図のような直方体 ABCD-EFGH において，辺 AD を 2：3 に内分する点を P，辺 AB を 2：1 に内分する点を Q とし，3 点 P，Q，E を含む平面と線分 AG の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$ とおくとき，

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$　である．




(2)　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，△ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boxed{オ}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{カ}$ である．

(3)　中心 (1，−2，3)，半径 4 の球面 $S$ が平面 $x=k$ と交わってできる円の半径が 2 になるとき $k=\boxed{キ}\pm\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}$ である．

**解答例**

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$　　　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=k\overrightarrow{\mathrm{AG}}=k\vec{b}+k\vec{d}+k\vec{e}$　……①とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{5}\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$　より

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=k\cdot\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+k\cdot\dfrac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+k\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{3}{2}k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\dfrac{5}{2}k\overrightarrow{\mathrm{AP}}+k\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

点 R は平面 QPE 上の点より　$\dfrac{3}{2}k+\dfrac{5}{2}k+k=1$　　よって　$k=\dfrac{1}{5}$

したがって①より　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{d}+\dfrac{1}{5}\vec{e}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\times1\times\cos60^\circ=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$　　　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$=\dfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\dfrac{1}{3}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{3}|\vec{b}|^2-\dfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\dfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}=\mathbf{0}$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{a})$

$=\dfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}-\dfrac{1}{3}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\dfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{3}|\vec{c}|^2-\dfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}=\mathbf{0}$

（よって　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp$平面 ABC である．）

(3)　球面 $S$ の方程式は　$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$

$S$ が平面 $x=k$ と交わってできる円の方程式は $(k-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$，$x=k$

つまり　$(y+2)^2+(z-3)^2=16-(k-1)^2$，$x=k$

半径の条件より　$16-(k-1)^2=2^2$　　$(k-1)^2=12$　　よって　$k=\mathbf{1\pm2\sqrt{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第48講　整数の性質

(1)　$\sqrt{n^2+7}$ が自然数となるような自然数 $n$ は $n=$ **ア** のみである．

(2)　18 の正の約数の個数は **イ** 個である．また，18 と 60 の最大公約数は **ウ**，最小公倍数は **エオカ** である．

(3)　$a$, $b$ は整数とする．$a$ を 7 で割ると 3 余り，$b$ を 7 で割ると 4 余る．$a+b$ を 7 で割ったときの余りは **キ**，$a-b$ を 7 で割ったときの余りは **ク** である．

(4)　533 と 7189 の最大公約数は **ケコ** である．

**解答例**

(1)　$\sqrt{n^2+7}$ が自然数となるとき，$\sqrt{n^2+7}=k$（$k$：自然数）とおける．

両辺を 2 乗して　$n^2+7=k^2$　　　$k^2-n^2=7$

つまり　$(k+n)(k-n)=7$　……①

ここで，$k$，$n$ は自然数より　$k+n$ は自然数．よって　$k-n$ も自然数である．

$k+n>k-n$ より，①を満たす自然数 $k+n$，$k-n$ の組は

$(k+n,\ k-n)=(7,\ 1)$　　　よって　$(k,\ n)=(4,\ 3)$ より　求める自然数 $n$ は　$n=\mathbf{3}$

(2)　$18=2\cdot3^2$ より　　18 の正の約数の個数は　$2\cdot3=\mathbf{6}$（個）

また，$60=2^2\cdot3\cdot5$ より

18 と 60 の　最大公約数は　$2\cdot3=\mathbf{6}$　　　最小公倍数は　$2^2\cdot3^2\cdot5=\mathbf{180}$

(3)　整数 $a$，$b$ は　$a=7l+3$，$b=7m+4$　（$l$，$m$ は整数）と表せる．

$a+b=(7l+3)+(7m+4)=7(l+m)+7=7(l+m+1)$

　よって　$a+b$ を 7 で割ったときの余りは　**0**

$a-b=(7l+3)-(7m+4)=7(l-m)-1=7(l-m-1)+6$

　よって　$a-b$ を 7 で割ったときの余りは　**6**

(4)　$7189=533\cdot13+260$

$533=260\cdot2+13$

$260=13\cdot20+0$

よって，求める最大公約数は　**13**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 49 講　データの分析(1)

[1]　次のデータは，あるゲームをチーム A，B で行ったときの得点である．

A　5，6，10，4，8，4，7，10，6，9

B　10，4，5，9，8，3，5，7，7，5，6，9　（単位は点）

(1)　A の平均値は ア . イ 点，B の平均値は ウ . エ 点である．

(2)　A の中央値は オ . カ 点である．

(3)　B の第 2 四分位数は キ . ク 点，四分位偏差は ケ . コサ 点である．

(4)　A と B のデータの散らばりの度合いは，データの範囲に基づくと シ の方が散らばりが大きく，四分位範囲に基づくと ス の方が散らばりが大きい．

シ，ス にあてはまるものを(①A　②B)から選び，数字で答えよ．

**解答例**

[1]　(1)　Aの平均値は　$\dfrac{1}{10}(5+6+10+4+8+4+7+10+6+9)=\dfrac{69}{10}=\mathbf{6.9}$（点）

Bの平均値は　$\dfrac{1}{12}(10+4+5+9+8+3+5+7+7+5+6+9)=\dfrac{78}{12}=\mathbf{6.5}$（点）

(2)　Aのデータを小さい順に並べると 4，4，5，6，6，7，8，9，10，10

よって中央値は　$\dfrac{6+7}{2}=\mathbf{6.5}$（点）

(3)　Bのデータを小さい順に並べると 3，4，5，5，5，6，7，7，8，9，9，10

よって，第 2 四分位数は　$\dfrac{6+7}{2}=\mathbf{6.5}$（点）

第 1 四分位数は　5 点，第 3 四分位数は　$\dfrac{8+9}{2}=8.5$（点）より，

四分位偏差は　$\dfrac{8.5-5}{2}=\mathbf{1.75}$（点）

(4)　A のデータの範囲は 10－4＝6（点），B のデータの範囲は 10－3＝7（点）より

データの範囲に基づくと **B**（②）の方が散らばりが大きい．

A のデータの第 1 四分位数は 5 点，A のデータの第 3 四分位数は 9 点より，

A のデータの四分位範囲は　9－5＝4（点）

また，B のデータの四分位範囲は　8.5－5＝3.5（点）

よって，四分位範囲に基づくと **A**（①）の方が散らばりが大きい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第50講　データの分析(2)

[1]　次のデータは，生徒10名に2種類のテストA，Bを行った結果である．

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 6 | 8 | 6 | 6 | 7 | 10 | 6 | 6 | 7 | 8 |
| B | 5 | 9 | 7 | 5 | 6 | 5 | 5 | 6 | 5 | 7 |

テストAの得点を$x$点，テストBの得点を$y$点として，次の問いに答えよ．

(1)　$x$，$y$の平均値をそれぞれ$\overline{x}$，$\overline{y}$とすると，$\overline{x}=$ ア ，$\overline{y}=$ イ である．

(2)　$x$の分散を$s_x{}^2$とすると，$s_x{}^2=$ ウ . エ である．

(3)　$x$と$y$の共分散を$s_{xy}$とすると，$s_{xy}=$ オ . カ である．

(4)　$x$と$y$の相関係数$r$を小数第3位を四捨五入して求めると，$r=$ キ . クケ である．

よって，$x$と$y$には コ . コ にあてはまるものを次の①～⑤から1つ選べ．

①　強い正の相関がある　②　弱い正の相関がある　③　相関がみられない
④　弱い負の相関がある　⑤　強い負の相関がある

**解答例**

| 番号 | $x$ | $y$ | $x-\overline{x}$ | $y-\overline{y}$ | $(x-\overline{x})^2$ | $(y-\overline{y})^2$ | $(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 5 | −1 | −1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 8 | 9 | 1 | 3 | 1 | 9 | 3 |
| 3 | 6 | 7 | −1 | 1 | 1 | 1 | −1 |
| 4 | 6 | 5 | −1 | −1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 7 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 10 | 5 | 3 | −1 | 9 | 1 | −3 |
| 7 | 6 | 5 | −1 | −1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 6 | 6 | −1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 9 | 7 | 5 | 0 | −1 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 8 | 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 合計 | 70 | 60 | | | 16 | 16 | 3 |

(1)　$\overline{x}=\dfrac{70}{10}=\mathbf{7}$，　$\overline{y}=\dfrac{60}{10}=\mathbf{6}$　　(2)　$s_x{}^2=\dfrac{16}{10}=\mathbf{1.6}$　　(3)　$s_{xy}=\dfrac{3}{10}=\mathbf{0.3}$

(4)　$r=\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}=\dfrac{\dfrac{3}{10}}{\sqrt{\dfrac{16}{10}}\sqrt{\dfrac{16}{10}}}=\dfrac{3}{4\times4}=\dfrac{3}{16}=0.1875\fallingdotseq\mathbf{0.19}$

よって，$x$と$y$には**相関がみられない**（③）

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。